

UNIVERSITÀ DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA VALLÉE D'AOSTE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE UMANE E SOCIALI
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA
INDIRIZZO SCUOLA PRIMARIA

TESI DI LAUREA

DAL SUBITIZING AI FATTI ARITMETICI

Docente Relatore:

Prof.ssa ELISABETTA ROBOTTI

Candidata:

ARIANNE PERRUQUET

Matricola n° 07 A01 191

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

ANNÉE ACADÉMIQUE 2014/2015

INDICE

INTRODUZIONE.....	4
1.1 Lo sviluppo della conoscenza numerica e delle abilità di calcolo	12
1.1.1 Il contributo della psicologia cognitiva	12
1.1.2 Il contributo delle neuroscienze.....	15
1.2 Il fenomeno del <i>subitizing</i>	21
1.2.1 Abilità di conteggio e contrassegni di riferimento.....	23
1.2.2 Gli studi di Dehaene	25
1.2.3 Il modulo numerico di Butterworth.....	26
1.3 Le abilità di conteggio.....	27
1.3.1 I principi del contare.....	30
1.4 Lo sviluppo delle abilità di calcolo	34
1.4.1 I modelli cognitivi di processamento numerico	38
1.5 Il calcolo mentale.....	43
CAPITOLO II - LA RICERCA-AZIONE	46
2.1. Le origini del termine e la sua diffusione.....	46
2.2. Caratteristiche della ricerca-azione	47
2.3. La ricerca-azione in campo educativo.....	51
2.4. La ricerca-azione e il miglioramento della qualità	53
2.5. La ricerca-azione e la sperimentazione <i>Dal subitizing ai fatti aritmetici</i> .	54
Capitolo III - LA SPERIMENTAZIONE.....	57
3.1 Struttura generale del progetto “Dal subitizing ai fatti aritmetici”	57
3.2 Ipotesi e obiettivi della sperimentazione	60
3.3 Metodologica	60
3.3.1 Classi coinvolte	62
3.3.2 Metodologia sperimentale	63
3.4 Le fasi e i tempi della sperimentazione	65
3.4.1 Fase 1 – Progettazione delle attività didattiche	66

3.4.2 Fase 2 – Sperimentazione delle attività didattiche	91
3.4.3 Fase 3 - Costruzione dello strumento di valutazione.....	96
3.4.4 Fase 4 – Analisi dei dati raccolti	114
CONCLUSIONI.....	121
ALLEGATI	124
BIBLIOGRAFIA	143
SITOGRAFIA	148

A Lorenzo e Matilda

*Alla fine di questo lungo percorso formativo, i ringraziamenti a tutte le
persone che mi hanno sostenuto sono dovuti e sentiti.*

*Grazie alla Prof.ssa Elisabetta Robotti per il prezioso sostegno nella redazione
della presente tesi, per le suggestioni e i consigli.*

*Grazie ai miei genitori Franco e Paola per essermi sempre stati vicino,
permettendomi di scegliere il mio cammino e di crescere.*

*Grazie a tutte le persone familiari, amici, colleghi che mi hanno incoraggiato e
spinto a non demordere e a portare a termine quest'esperienza, in particolare
Nicole, Orietta e Michelle.*

*Grazie a mio marito Claudio che ha saputo spronarmi ad andare avanti e a
non arrendermi di fronte alle difficoltà, credendo sempre in me.*

*Grazie ai miei figli, Lorenzo e Matilda, cui questo lavoro è dedicato, perché
sono stati fonte d'ispirazione e mi hanno dato l'energia e la grinta necessaria
a portare a termine questo lungo percorso.*

INTRODUZIONE

Il potenziamento del calcolo mentale alla scuola primaria è una necessità espressa dalle Indicazioni Nazionali per il Curricolo¹ ma anche dai risultati di indagini nazionali come le prove INVALSI.² Le Indicazioni Nazionali considerano tutte le discipline con pari dignità, ma alcune sono considerate particolarmente importanti, a livello internazionale, per le finalità che propongono all'interno del percorso formativo: lingua madre, matematica, scienze, inglese. Gli apprendimenti di base sono da garantire come diritto formativo irrinunciabile per l'esercizio della cittadinanza attiva.

Le ultime Indicazioni Nazionali rispetto ai documenti precedenti danno sempre più ampio spazio al calcolo mentale e alla necessità di insegnare agli alunni strategie che lo supportano, che sono diverse e indipendenti dalle procedure del calcolo scritto. Queste strategie che mirano a far acquisire la struttura posizionale delle quantità, permettono di passare ai concetti di addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione, come manipolazioni intuitive delle quantità. Puntare maggiormente sul calcolo mentale permette di recuperare e potenziare i processi cognitivi e le strategie presenti nel patrimonio cognitivo prearitmetico, patrimonio che si possiede già prima di conoscere il livello sintattico dei numeri scritti (Winn, 1990).

Dal 2001 le Indicazioni Ministeriali comprendono i traguardi di sviluppo e gli obiettivi di apprendimento per la scuola dell'infanzia, la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado, pensate come un unico ciclo d'istruzione. Quest'ottica di continuità, condivisa dalla ricerca, sarà accolta e sottolineata dalle Indicazioni per il Curricolo per la Scuola dell'Infanzia e per il primo ciclo di Istruzione (Fioroni 2007) che prevedono un documento unico per i tre ordini

¹ Le Indicazioni Nazionali per il Curricolo sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole autonome che sostituisce quelli che, un tempo, si chiamavano Programmi Ministeriali. Il testo entra in vigore con il Decreto Ministeriale n. 254 del 16 Novembre 2012 (G.U. n. 30 del 5 Febbraio 2013) e sostituisce sia le Indicazioni nazionali del 2004 che le Indicazioni per il curricolo del 2007 (www.indicazioninazionali.it).

² Le prove INVALSI sono uno strumento di rilevazione nazionale standardizzato, atto a misurare periodicamente il livello delle competenze negli apprendimenti degli studenti delle scuole italiane, attualmente prevedono la somministrazione di prove di italiano e matematica (www.invalsi.it).

di scuola nell'ottica di un apprendimento e una didattica in continuità tra i diversi cicli scolastici. Questa scelta è stata condivisa da molti studiosi (si vedano i materiali dell'Unione Matematica Italiana, UMI, e il volume curato da Grugnetti e Villani: *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, Pitagora Editrice, Bologna 1999).

Negli ultimi anni i documenti ministeriali che si occupano di matematica, diversi tra loro per struttura e finalità, iniziano a condividere maggiormente elementi teorici e contenuti. Un esempio è rappresentato dalle Indicazioni per il curriculum e il Quadro di riferimento per la matematica del Servizio Nazionale di Valutazione, Snv-Invalsi.³ Nel documento, nel quale si descrivono le prove INVALSI troviamo *«la valutazione del sistema dell'istruzione, ossia una valutazione dell'efficacia e dell'efficienza del sistema scolastico, globalmente inteso, a livello nazionale e per singoli settori o singole istituzioni scolastiche»*, nelle quali viene messa in evidenza la stretta interconnessione con le Indicazioni, specificando che *«le prove sono redatte coerentemente al quadro generale nel quale sono formulati i curricula della scuola italiana, partendo dalle Indicazioni Nazionali di legge attualmente in vigore»*. Per quanto riguarda nello specifico la competenza matematica *«le prove INVALSI sono strutturate con l'intento di sondare se le conoscenze che la scuola, ai diversi livelli, stimola e trasmette, sono ben ancorate ad un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze stabili, almeno sui livelli essenziali. Le prove intendono valutare la conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico. La formazione matematica dovrebbe essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico. Le prove INVALSI non intendono limitarsi a valutare l'apprendimento della matematica utile, ma devono cercare di far riferimento alla matematica come strumento di pensiero*

³ http://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_I_ciclo.pdf

e alla matematica come disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico».

Le prove INVALSI, nella parte specifica che riguarda la matematica, danno sempre più ampio spazio a quesiti che richiedono di calcolare mentalmente e di approssimare, inoltre, al loro interno vengono definiti gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per lo sviluppo delle competenze con un chiaro ed esplicito riferimento alla continuità verticale fra scuole.

In quest'ottica nasce l'ipotesi di ricerca che, a partire dal progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* coordinato dall'Università della Valle d'Aosta e dall'Assessorato Istruzione e Cultura – Sovrintendenza agli studi Ufficio Supporto all'Autonomia Scolastica della Valle d'Aosta, intende lavorare in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria sul *subitizing* come supporto all'acquisizione di fatti aritmetici e potenziamento delle abilità di calcolo. Il progetto *Questione di numeri* nasce dalla necessità di far fronte a diverse esigenze cognitive ed in particolare a quelle degli studenti con Disturbi Specifici dell'Apprendimento (DSA),⁴ con attenzione particolare alla discalculia evolutiva (DE).⁵ Tale necessità è oggetto di dibattito nella ricerca in didattica della matematica e nella ricerca in psicologia cognitiva sulle difficoltà di apprendimento. Gli studenti con DSA sono stimati essere tra il 3% e il 5% della popolazione scolastica⁶ e dati recenti indicano che, attualmente, è certificato lo 0,9% della popolazione scolastica,⁷ dunque il numero di certificazioni di studenti con DSA è destinato ad

⁴ La legge 8 ottobre 2010, n. 170, riconosce la dislessia, la disortografia, la disgrafia e la discalculia quali Disturbi Specifici di Apprendimento (DSA). I Disturbi Specifici di Apprendimento interessano alcune specifiche abilità dell'apprendimento scolastico, in un contesto di funzionamento intellettivo adeguato all'età anagrafica.

Sulla base dell'abilità interessata dal disturbo, i DSA assumono una denominazione specifica: dislessia (lettura), disgrafia e disortografia (scrittura), discalculia(calcolo).

<http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/dsa>

⁵ Sulla base dell'abilità interessata dal disturbo, i DSA assumono una denominazione specifica: dislessia (lettura), disgrafia e disortografia (scrittura), discalculia(calcolo).

<http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/dsa>

⁶ http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/5a6a1ca2-9464-4cf6-b709-a62cb91b0deb/alunni_dsa.pdf

⁷ http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/b09d9c51-9b41-4fb7-82f8-286f981bcf52/statistiche_alunni_dsa_2010_2011.pdf

aumentare. In Valle d'Aosta la percentuale è in linea con i dati nazionali ed è un fenomeno che tocca il 4,8-5 % circa della popolazione scolastica, il che si traduce in un bambino per classe. Alcune ricerche però, in particolare nel dominio della psicologia dello sviluppo e dell'educazione (Lucangeli, 2003), ritengono che questo dato preoccupante sia dovuto ad un eccesso di certificazioni DSA piuttosto che ad un reale dato inerente la patologia. *Molto spesso, affermano tali ricerche, si tratta di bambini con difficoltà di apprendimento che possono migliorare, anche di molto, semplicemente cambiando metodo d'insegnamento* (Lucangeli, Ianniti, 2004:167). Infatti, è possibile implementare le potenzialità individuali, già a partire dalla scuola dell'infanzia, attuando una didattica appropriata che sia il risultato dello sforzo sinergico tra ricerca e scuola. Questo consentirebbe di contenere le diagnosi di DSA e affrontare le difficoltà di apprendimento. Sulla base di queste ipotesi, molte ricerche mettono in evidenza che Un uso consapevole di particolari strategie didattiche adatte a studenti diagnosticati con DSA, ed in particolare con discalculia evolutiva (DE)⁸ (Butterworth, 2005; Geary, 2000; Kosc, 1974; Dehaene, 1997), è importante anche per supportare l'apprendimento di molti studenti non certificati, che hanno profili di difficoltà di apprendimento del calcolo e che risultano molto simili a quelli degli studenti discalculici. Inoltre, studi nazionali e internazionali (Ianniti & Lucangeli, 2005; Di Martino, 2009, Zan, 2000a, 2000b, 2007) indicano come il processo di apprendimento in matematica per molti studenti (con difficoltà o con diagnosi di DSA) risulta ostacolato, "affaticato" o comunque non facilitato a causa di molteplici fattori tra cui la mancanza di motivazione, o la maggiore ansia generata dalla matematica rispetto alle altre discipline. Molto spesso, questi stessi fattori contribuiscono ad aggravare le difficoltà di apprendimento anche degli studenti

⁸ Temple, (1992) definisce la discalculia evolutiva come un disturbo delle abilità numeriche e aritmetiche che si manifesta in bambini di intelligenza normale, che non hanno subito danni neurologici. Essa può presentarsi associata a dislessia, ma è possibile che ne sia dissociata.

con DSA (Farmer et al., 2002; Spafford & Grosser, 1996). Mettere a punto dunque una “didattica efficace”, sembra un obiettivo più che mai necessario nell’ambito della ricerca e della formazione degli insegnanti. Per “didattica efficace” si intende una didattica che tenga conto di difficoltà in matematica tipiche degli studenti, descritte nella letteratura, e che proponga attività nelle quali siano coinvolti, il più possibile, tutti gli studenti della classe (Robotti, Baccaglini, Franck, 2013). Tale “didattica efficace” vuole provare a fornire una risposta alla necessità degli insegnanti che consenta loro di far fronte alle diverse esigenze cognitive che si presentano nell’ambito della classe, siano esse legate al disturbo specifico di apprendimento o alla difficoltà. In particolare, tale risposta intende avvalersi dell’ipotesi secondo la quale una didattica mirata di potenziamento delle abilità innate dell’individuo (Wynn, 1992; Dehaene, 1997), consentirebbe di limitare le difficoltà di apprendimento e, quindi, il numero di certificazioni DSA (Butterworth, 1999, Lucangeli 2003).

Partendo da queste premesse, obiettivo della ricerca *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* è avviare un progetto di continuità tra scuola primaria e dell’infanzia in stretta connessione con il mondo della ricerca, al fine di strutturare e sperimentare percorsi didattici a supporto della “didattica efficace” sopracitata.

I livelli scolari ai quali il progetto intende rivolgersi sono la scuola dell’infanzia e la scuola primaria, perché è a questi livelli scolastici che è possibile potenziare abilità individuali usando strategie didattiche che rendono plastiche le particolari funzioni cognitive legate al numero (Lucangeli, 2012).

Il progetto di ricerca *Dal subitizing ai fatti numerici*, oggetto di questa tesi, prende origine dall’ipotesi secondo la quale l’utilizzo precoce di specifiche attività didattiche, che hanno l’obiettivo di potenziare la capacità di *subitizing*, facilita e supporta l’acquisizione dei fatti aritmetici potenziando, successivamente, il calcolo mentale. In particolare, sulla base di quest’ipotesi e degli elementi teorici del presente lavoro di ricerca, le attività e i materiali

sviluppati si basano e utilizzano prevalentemente il canale visivo non verbale.⁹ L'obiettivo di quest'approccio didattico innovativo, denominato "didattica efficace", è di contenere il numero di diagnosi di DSA e, quindi, di falsi positivi.¹⁰

La ricerca oggetto di questa tesi, *Dal subitizing ai fatti numerici*, fa parte del progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* e ne sviluppa una particolare area, quella dei contenuti matematici che riguarderanno prevalentemente gli aspetti di percezione ed elaborazione del numero, della conta e del calcolo mentale. Le attività saranno progettate tenendo conto del percorso didattico previsto dalle Indicazioni Nazionali della scuola dell'infanzia e primaria: dall'appropriazione delle prime competenze numeriche (enumerazione, conta, lettura e scrittura dei numeri, fatti aritmetici) relative alla scuola dell'infanzia e alle prime classi della scuola primaria all'acquisizione dei fatti aritmetici e delle abilità di calcolo mentale.

Sulla base delle premesse sopradescritte, la presente tesi sarà pertanto organizzata come segue:

Nel Capitolo I verrà descritto l'inquadramento teorico funzionale alla formulazione dell'ipotesi di ricerca, alla definizione degli obiettivi di ricerca e degli obiettivi didattici che guidano la progettazione dell'impianto sperimentale oggetto di analisi di questa tesi. In questo capitolo si fa riferimento sia a teorie nel dominio della psicologia cognitiva sia a teorie nel dominio della didattica della matematica al fine di poter definire un percorso didattico che possa rappresentare un esempio di didattica inclusiva. Fra gli obiettivi del progetto, infatti, si considera anche la necessità di definire una didattica efficace per l'intera classe considerando quindi anche i soggetti con difficoltà in matematica certificate o non ma aventi profili di difficoltà simili a quelli dei soggetti certificati.

⁹ Come illustrato dettagliatamente nel § 1.4.1

¹⁰ Per falso positivo si intende un risultato di un test che conduce erroneamente a rifiutare l'ipotesi sulla quale il test è stato svolto.

Nel Capitolo II, verrà illustrata la ricerca-azione, l'origine del termine, le sue caratteristiche, con particolare riferimento alla ricerca-azione in campo educativo, e la descrizione di tale tipo di ricerca in riferimento al progetto *Dal subitizing ai fatti aritmetici*, oggetto delle tesi.

Il Capitolo III sarà dedicato alla metodologia di ricerca, elemento portante della fase sperimentale. Di essa, descriveremo gli aspetti legati alla progettazione di attività didattiche, all'ideazione e creazione degli strumenti utilizzati in tali attività e dunque alla definizione della sequenza didattica oggetto di analisi della tesi. Essa sarà condotta considerando come chiavi di lettura le basi teoriche descritte nel Capitolo I. Tale analisi mirerà a mettere in evidenza se e come gli obiettivi didattici prefissati sono stati raggiunti dagli alunni delle classi coinvolte nella sperimentazione. L'analisi si avvarrà di uno strumento, che chiameremo "test di valutazione", progettato in questa sede, sottoposto agli alunni delle classi che hanno seguito il percorso didattico sperimentale e agli alunni delle classi di controllo, che hanno seguito una didattica sul numero e sul calcolo di tipo tradizionale (non sperimentale). Il capitolo terminerà con la raccolta dei risultati ottenuti dal test e la loro analisi.

Infine, le Conclusioni mostreranno, con una visione d'insieme, l'evoluzione della ricerca, a partire dall'ipotesi iniziale, sino ai suoi risultati finali.

Capitolo I - INQUADRAMENTO TEORICO

1.1 Lo sviluppo della conoscenza numerica e delle abilità di calcolo

Per *conoscenza numerica* si intende l'insieme delle capacità che consentono a un bambino di capire le quantità e le loro trasformazioni (Lucangeli, 1999).

Nella vita di tutti i giorni, fin dalla più tenera età, gli esseri umani si trovano a dover affrontare situazioni e problemi riconducibili alla nozione di numero. Osservare in che modo essi provano ad affrontarli e a risolverli aiuta la ricerca a comprendere come avviene la conquista della conoscenza numerica, il funzionamento della mente umana e l'origine del procedimento di astrazione che è alla base della formazione del concetto di numero.

L'intelligenza numerica è la capacità di capire ed interpretare l'ambiente circostante attraverso la quantità (Lucangeli, Poli e Molin, 2003). Possedere il senso del numero significa, infatti, sapersi muovere con disinvoltura tra il mondo reale della quantità e il mondo matematico dei numeri e delle espressioni numeriche (Case, 2000).

Oggi la ricerca psicologica dimostra che nasciamo predisposti all'intelligenza numerica così come all'intelligenza verbale. Se allora è fondamentale, dal punto di vista educativo, accompagnare lo sviluppo del linguaggio attraverso un'adeguata istruzione, è altrettanto necessario accompagnare lo sviluppo delle capacità di "intelligere" i fenomeni attraverso la quantità e i suoi principi (Lucangeli, 2003).

La conquista della conoscenza numerica costituisce senza dubbio uno dei processi più affascinanti e complessi dello sviluppo infantile.

1.1.1 Il contributo della psicologia cognitiva

La psicologia cognitiva con J. Piaget si occupa per prima di formulare teorie

cognitive fondamentali riguardo l'elaborazione del concetto di numero (Piaget e Szeminska, 1941), ipotizzando un rapporto inscindibile tra le strutture d'intelligenza generale e l'evoluzione di competenze numeriche nelle abilità di pensiero. Egli scrive “[la costruzione del numero] è correlata allo sviluppo della logica stessa [...] effettivamente il numero si organizza, una tappa dopo l'altra, in stretta solidarietà con l'elaborazione graduale dei sistemi di inclusione (gerarchie delle classi logiche) e delle relazioni asimmetriche (seriazione qualitative), la successione dei numeri venendo così a costruirsi in quanto sintesi operante della classificazione e della seriazione. Le operazioni logiche e aritmetiche ci sono dunque apparse come un solo sistema totale e psicologicamente naturale, risultando le seconde dalla generalizzazione e dalla fusione delle prime, sotto i loro due aspetti complementari dell'inclusione delle classi e delle relazioni, ma con eliminazione della qualità” (Piaget, 1952:21).

Piaget evidenzia come la capacità da parte del bambino di produrre la sequenza verbale dei numeri non sia indice di saper utilizzare il concetto di numero: i bambini, infatti, sono in grado di servirsi dei numeri senza comprenderne appieno il significato. A questo scopo, invece, occorre in primo luogo, che essi si rendano conto che ogni parola-numero corrisponde a uno e un solo oggetto (principio di corrispondenza biunivoca), e in secondo luogo che riconoscano la corrispondenza tra la sequenza numerica e la quantità dell'insieme considerato (principio di cardinalità). Perché ciò possa avvenire, è necessario che il bambino giunga a padroneggiare proprio le operazioni logiche di classificazione e di seriazione. Molti studi successivi hanno rilevato alcuni elementi di debolezza nel modello piagetiano: secondo Piaget (Piaget e Szeminska, 1968) il concetto di numero (valore cardinale e ordinale) non viene evolutivamente conquistato prima dei 5–6 anni, perché alla sua base ci sarebbero le capacità tipiche del pensiero operatorio (ragionamento transitivo, conservazione della quantità, astrazione dalle proprietà percettive).

Oggi la ricerca ha dimostrato, invece, che anche un bimbo di pochi mesi di vita è già capace di discriminare le quantità e di categorizzare il mondo che

vede e sente in termini di numerosità (Wynn, 1992). Il bambino, infatti, nasce con la capacità di formarsi una rappresentazione della numerosità di un insieme di oggetti ed è anche in grado di memorizzarla, imprimendola nel ricordo visivo, nel breve termine, e di richiamarla. Wynn, (1992) ritiene che il possesso del concetto di numerosità implica che il bambino di pochi mesi di vita, discrimina piccole quantità, e possiede aspettative aritmetiche basate sul concetto di numerosità (Figura 1).

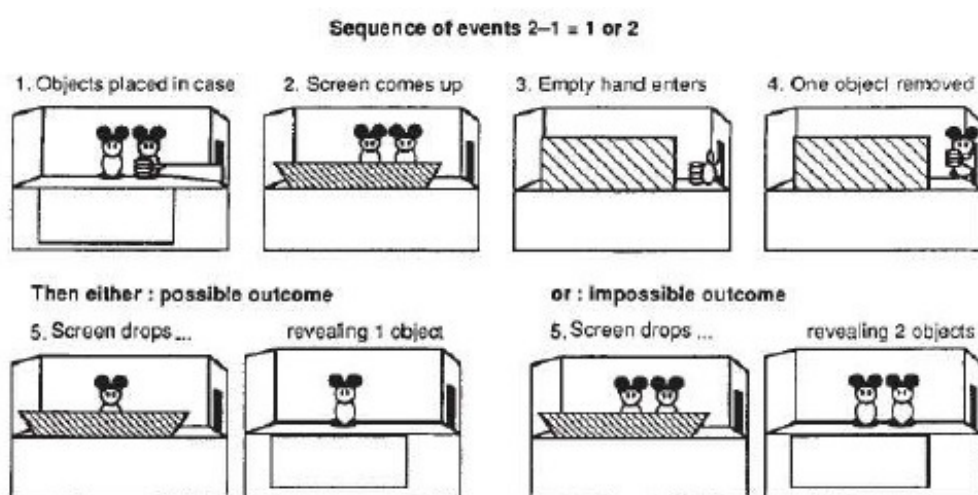


Figura 1 Wynn (1992). Nature 358, 749-759.

Se esiste una competenza numerica preverbale, innata e indipendente dalla manipolazione linguistico-simbolica, allora, imparare a contare rappresenta il primo collegamento tra natura e cultura. Alla base della comprensione delle quantità stanno compiti di tipo semantico, che cioè individuano quanto vale un numero rispetto a un altro. Esempi concreti di tali compiti possono essere la stima di numerosità, la comparazione, la seriazione ed anche il conteggio. Le competenze di seriazione e quelle di sequenza numerica sembrano indispensabili perché le operazioni di confronto consentano un facile accesso alla comprensione del valore quantitativo dei numeri stessi. Dai risultati di tali ricerche, portate avanti dalla psicologia cognitiva, è possibile desumere indicazioni fondamentali anche per gli apprendimenti necessari a una buona

evoluzione della conoscenza numerica: infatti è cruciale facilitare l'apprendimento di capacità di stima della quantità, di comparazione e di seriazione.

Se come fin qui descritto la conoscenza numerica, implica, secondo le tesi delle ricerche esposte, la comprensione semantica della quantità, tale comprensione è ovviamente mediata dalla capacità di saper utilizzare bene anche il sistema dei cifre indo-arabe. Ciò significa saper trasformare l'etichetta numerica nella quantità che essa sta a rappresentare. Tale trasformazione implica l'uso di meccanismi lessicali e sintattici di lettura dei numeri. In particolare i meccanismi lessicali riguardano i processi che consentono di riconoscere il nome del numero arabo (per esempio 17 non si legge come uno-sette ma diciassette). I meccanismi sintattici riguardano la "grammatica interna" al numero, cioè il valore posizionale delle cifre. Per capire, ad esempio, la differenza tra 17 e 71, il bambino deve conoscere la grammatica del valore posizionale, la quale oltre a consentirgli di comprendere la differenza nella rappresentazione semantica della quantità (1 nel 71, o 1 nel 17), modifica il nome stesso del numero (diciassette per uno-sette, settantuno per sette-uno). Questo tipo di processamento del numero viene spiegato dal modello cognitivo del triplice codice di Dehaene, che verrà presentato nel capitolo 3.1.

1.1.2 Il contributo delle neuroscienze

Numerose indagini nel campo delle neuroscienze hanno messo in luce i rapporti che intercorrono tra linguaggio e numeri e tra numeri e memoria. Le indagini effettuate su adulti con gravi lesioni cerebrali hanno evidenziato l'autonomia fra competenze linguistiche e numeriche. Gelman e Butterworth, a questo proposito, affermano che il linguaggio non influisce in alcun modo sulla conoscenza numerica, ma una cosa è dire che il linguaggio favorisce l'uso dei concetti numerici e tutt'altra cosa è affermare che esso ne fornisce le premesse

di base. Il linguaggio non è dunque un requisito indispensabile per lo sviluppo della nozione di numero ma facilita l'impiego dei concetti numerici (2005).

Gli studi basati sulle neuro-immagini hanno permesso di localizzare nei lobi parietali l'area cerebrale implicata nella stima e nel calcolo approssimato e nel giro angolare sinistro quella coinvolta nel calcolo esatto. Queste aree non interessano quelle deputate al linguaggio (Dehaene e Cohen, 1995).

In un'altra indagine, condotta su una paziente, la signora Gaddi, Cipollotti e collaboratori hanno evidenziato che esiste un'autonomia fra le abilità numeriche e le abilità linguistiche. La signora Gaddi a causa di un ictus, localizzato nel lobo parietale sinistro, cominciò a mostrare delle difficoltà che interessavano le capacità numeriche. Non era più capace di cogliere a colpo d'occhio la numerosità di un insieme di elementi (subitizing vedasi capitolo 2) così era costretta a ricorrere al conteggio (counting) anche quando si trattava di contare un gruppo di soli quattro elementi. Il linguaggio, invece, rimase fluente ed adeguato. I ricercatori, studiando questo caso, arrivarono a concludere che delle lesioni nelle aree corticali deputate al numero non causano alcun deficit a livello linguistico.

I risultati di queste ed altre ricerche in questo campo, si oppongono alle teorie sostenute dal linguista Chomsky. Egli sosteneva che la facoltà di elaborare i numeri emergesse prevalentemente dall'interazione tra le competenze linguistiche del sistema centrale e altre capacità cognitive legate al riconoscimento e alla manipolazione concreta degli oggetti e degli insiemi. Egli non prende in considerazione l'esistenza di una "facoltà di elaborare i numeri" autonoma e specifica.

Altri studi si sono occupati di indagare, invece, la relazione tra apprendimento numerico e memoria di lavoro rilevando il ruolo fondamentale della *working memory* nei processi di calcolo matematico. Questo tipo di memoria, che Baddeley (1986, 1992) considera come un sistema di immagazzinamento temporaneo con capacità e tempo di ritenzione ridotto, è necessaria per molti compiti, in particolare per il calcolo mentale (Hulme e Mckenzie, 1992). Per comprendere il ruolo della memoria a breve termine nelle abilità matematiche

Butterworth e Cipollotti (1996) hanno condotto uno studio su di un paziente, il Signor Morris, colpito da un ictus all'emisfero sinistro. Il paziente presentava disturbi del linguaggio e una leggera forma di afasia di Broca,¹¹ il suo eloquio era maggiormente compromesso rispetto alla comprensione del linguaggio. Il signor Morris presentava, inoltre, un difetto nella memoria a breve termine che faceva sì che egli fosse in grado di ripetere con regolarità solo due numeri contro i sette ricordati normalmente dalla maggior parte delle persone.

Linguaggio e numeri, numeri e memoria sono sistemi che risultano tra loro indipendenti pur integrandosi in compiti cognitivi più complessi. Il cervello organizza l'elaborazione aritmetica servendosi di circuiti separati da quelli utilizzati per le capacità cognitive generali.

Secondo Butterworth (1999) la natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini della loro numerosità... per capacità più avanzate abbiamo bisogno dell'istruzione, ossia di acquisire strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo.

Esempi di strumenti concettuali possono essere ad esempio parti del corpo, come le dita delle mani e dei piedi. Secondo l'autore, il sistema cognitivo prevede l'indipendenza della rappresentazione mentale della conoscenza numerica da altri sistemi cognitivi.

L'elaborazione del numero è mediato dall'attivazione di una rappresentazione mentale della quantità che è indipendente da abilità linguistiche. Esiste, quindi, una competenza numerica non verbale mediata da una rappresentazione mentale della quantità.

Dati sperimentali hanno portato alla formulazione di ipotesi secondo cui l'elaborazione del numero può essere ricondotta non solo ed esclusivamente a operazioni di processazione linguistico-simbolica, ma anche ad operazioni cognitive mediate dall'attivazione di una rappresentazione mentale della quantità numerica di tipo analogico, non verbale (Deheane, 1992).

¹¹ Afasia di tipo non fluente che può rendere chi ne è affetto incapace di comprendere o formulare frasi con una struttura grammaticale complessa.

Starkey e Cooper (1980) hanno svolto delle indagini su bambini dai 4 ai 6 mesi utilizzando la tecnica dell'*abituazione/disabituazione*. La tecnica si basa sull'assunto che i bambini guardano più a lungo gli stimoli nuovi. Ai bambini dell'esperimento venivano proiettate in successione delle diapositive, ogni diapositiva mostrava una serie ordinata di pallini neri. I bambini tendevano a fissare sempre meno le diapositive che mostravano lo stesso numero di pallini anche se posizionati a diverse distanze tra di loro (*abituazione*). Al contrario, il tempo di fissazione aumentava significativamente se venivano mostrate loro diapositive in cui variava sia il numero dei pallini che la loro distanza (*disabituazione*). I bambini mostravano subito un grande interesse alle immagini inaspettate. Questo studio ha permesso di registrare la sensibilità dei bambini al cambiamento di numerosità e alla variazione della distanza fra i pallini neri.

Anche gli esperimenti di Starkey, Spelke e Gelman (1990), su bambini di 6 e 8 mesi, avevano come obiettivo quello di studiare il fenomeno dell'*abituazione/disabituazione*. Gli sperimentatori hanno utilizzato fotografie a colori di oggetti abituali di diverso tipo e diverse dimensione. L'esperimento li ha condotti a asserire che i bambini fissano più a lungo le diapositive che presentano un numero diverso di raffigurazioni. Non erano le caratteristiche peculiari degli oggetti proposti come il colore, la forma e la dimensione a incuriosire i piccoli, ma la variazione di numerosità.

Il possesso del concetto di numerosità implica che i bambini, oltre al fatto che siano in grado di discriminare due insiemi in base al numero degli elementi contenuti, abbiano *aspettative aritmetiche*, basate sul concetto di numerosità. In altri termini, i bambini sono in grado effettuare semplici operazioni di tipo additivo ($1+1$) e sottrattivo ($2-1$).

Wynn (1992) riscontrò che la capacità di addizionare e sottrarre era presente già in bambini di 5-6 mesi. Per dimostrare tale ipotesi la ricercatrice fece una serie di esperimenti nei quali utilizzava un teatrino di marionette dotato di uno schermo removibile, al centro del quale poneva un pupazzo. A questo punto lo schermo si alzava nascondendo completamente il giocattolo; la mano entrava

per la seconda volta e collocava un altro pupazzo identico al primo sulla scena, per poi ritirarsi vuota. In questo modo il bambino, oggetto dell'indagine, aveva visto effettuare concretamente l'operazione di addizione ma non il risultato. In seguito la Wynn poneva i bambini di fronte a due diverse situazioni. Una prevedeva che dietro lo schermo i bambini vedessero come previsto i due pupazzi ($1+1=2$ risultato possibile). La seconda invece mostrava ai bambini un solo pupazzo sullo schermo ($1+1=1$ risultato impossibile). I bambini non sapevano che lo sperimentatore aveva tolto un pupazzo utilizzando una botola non visibile. La ricercatrice misurava il tempo di fissazione in entrambe le situazioni: quella possibile e quella impossibile. Confrontando i tempi trascorsi a fissare le due diverse situazioni la Wynn constatò che i bambini osservavano un secondo più a lungo la situazione che presentava l'addizione errata ($1+1=1$) rispetto a quella corretta ($1+1=2$). Per rafforzare le sue osservazioni la Wynn fece ulteriori esperimenti ed ottenne gli stessi risultati. Ad esempio propose ai bambini la sottrazione ($2-1$). Essi rimanevano sorpresi nello scoprire dietro lo schermo due oggetti, $2-1=2$, anziché 1. I diversi tempi di fissazione rilevati portarono la ricercatrice a presumere che i bambini fossero in qualche modo consapevoli dell'erroneità dei risultati. Da queste conclusioni si desume che i bambini di 5-6 mesi dispongono di un meccanismo mentale che permette loro di risolvere semplici operazioni aritmetiche.

Anche Koechlin, Naccache, Bolt e Dehaene (1999) verificarono gli stessi risultati della dott.ssa Wynn. Essi dimostra che neanche la variazione della posizione e della distanza tra i pupazzi presentati sulla scena, influenzavano i risultati.

Da quanto è emerso sopra e da quanto evidenziano anche da esperti quali Lucangeli e Ianniti (2004:170) «esiste una competenza numerica pre-verbale innata e indipendente dalla manipolazione linguistico-simbolica e che quindi imparare a contare rappresenta il primo collegamento tra natura e cultura».

Queste teorie introducono nuovi elementi che la didattica deve tenere in considerazione e cercare di applicare per facilitare l'acquisizione del concetto

di numero nei bambini con difficoltà e non; tenuto conto che un lavoro di ricerca e sperimentazione è alla base dell'introduzione di nuove modalità, in questa tesi si cercherà di applicare i concetti analizzati per favorire la memorizzazione dei fatti aritmetici, attraverso l'utilizzo del *subitizing*.

1.2 Il fenomeno del *subitizing*

A partire dagli anni settanta, alcuni studi hanno affrontato il tema della costruzione del numero nel bambino e hanno messo in evidenza l'esistenza di processi di quantificazione come il *subitizing*, la conta e la stima.

Di notevole interesse sono le ricerche sul *subitizing* visto sia dal punto di vista percettivo che concettuale (Clements, 1999). Tali ricerche rivelano come il bambino fin da molto piccolo possieda una sorta di sesto senso numerico.

Dehaene e Cohen (1994) definiscono il *subitizing* come la capacità di distinguere i mutamenti di numerosità a colpo d'occhio, senza l'uso del calcolo, indipendente dall'identità degli oggetti osservati. Il numero massimo di oggetti percepibili in questo modo sembra essere di 2/3 elementi nei bambini, 4/6 elementi nei soggetti adulti, ed è caratterizzato da risposte veloci e accurate.

Per grandezze più grandi, invece, entra in gioco la stima, un processo di riconoscimento di quantità maggiori di 6/7 elementi. Tale meccanismo è però meno accurato rispetto a quello del *subitizing* e non fornisce, come risposta, una quantità esatta.

Secondo la teoria della figura, (*pattern theory*) di Mandler e Shebo (1982), gli individui per contare insiemi di pochi elementi associano gli stessi ad una figura geometrica secondo la loro disposizione nello spazio, quando vedono insiemi di uno, due o tre oggetti notano immediatamente che formano un punto, una linea, e un triangolo, quindi essi assegnano a ciascuno di questi insiemi il numero appropriato.¹² Secondo questa teoria, la velocità di reazione nell'enumerazione di insiemi di pochi elementi si spiega con il fatto che il soggetto non ha bisogno di contare mentalmente gli elementi uno ad uno, ma "vede" immediatamente che gli oggetti formano un punto, una linea, o un triangolo. Quando si passa a insiemi di elementi superiori a tre, non c'è più, solitamente, un'unica figura che corrisponde al numero degli elementi, quindi,

¹² <http://www.filosofia.unimi.it/zucchi/NuoviFile/4.Subitizing13.pdf>, slide *subitizing*.

il soggetto è costretto a contare gli elementi uno per uno (vocalmente o mentalmente), e questo richiede più tempo.

Questa teoria prevede che il *subitizing* avvenga solo con insiemi di meno di quattro elementi questo contrasta con quanto detto in precedenza, cioè che i soggetti adulti siano in grado di riconoscere a colpo d'occhio in media da 4 a 6 elementi. Inoltre esistono insiemi non 'canonici' di tre elementi in cui essi non formano un triangolo perché disposti in modo lineare. Secondo la teoria della figura, i soggetti dovrebbero avere la tendenza a confondere insiemi di questo tipo con gli insiemi di due elementi mentre Trick (1987) ha dimostrato che ciò è falso e che, al contrario, essi sono più rapidi nell'enumerarli rispetto ad enumerare insiemi in cui gli oggetti formano un triangolo.

Un'altra teoria del *subitizing*, la teoria della memoria di lavoro di Klahr e Wallace (1976), afferma che per ricordare un insieme di elementi che ci viene mostrato, dobbiamo immagazzinare informazioni riguardo a questi elementi nella memoria di lavoro,¹³ in particolare nel loop fonologico, circuito che viene attivato in presenza di stimoli linguistici (Baddeley, 2003). Essa ha, però, una capacità limitata: se il numero degli elementi da contare è più di quattro, l'informazione da tenere a mente eccede la capacità della memoria di lavoro. Il soggetto, allora, deve concentrarsi su vari aspetti: contare gli elementi, ricordarne il totale, liberare la memoria di lavoro poi tornare a guardare l'insieme, contare un altro sottoinsieme, fare la somma. Secondo Klahr e Wallace (1976) questa è la ragione per cui i tempi medi di reazione si impennano quando i soggetti devono contare insiemi con 5, 6 o 7 elementi.

Desunto che il *subitizing* avviene con insiemi di meno di quattro elementi dove l'informazione che il soggetto deve ritenere non eccede la capacità della memoria di lavoro, dovremmo aspettarci che, se aumentiamo il carico della memoria di lavoro, diventi impossibile attivare il *subitizing*. Logie e Baddeley (1987) hanno, però, dimostrato che non è così. Anche se aggiungiamo degli

¹³ Gli psicologi distinguono la memoria di lavoro, che serve ad immagazzinare l'informazione per periodi relativamente brevi e ha una capacità limitata, dalla memoria a lungo termine, che serve a immagazzinare l'informazione per periodi più lunghi ed ha una capacità maggiore.

elementi distrattori nell'immagine, questo da solo non è sufficiente a diminuire la capacità del soggetto di fare *subitizing*. Nessuno è mai riuscito a dimostrare che l'aumento di carico della memoria di lavoro ha un effetto sulla possibilità di fare *subitizing* fatto che contrasta con la teoria formulata da Klahr e Wallace.

1.2.1 Abilità di conteggio e contrassegni di riferimento

Altre due teorie affrontano il fenomeno del *subitizing*: una è la teoria inerente lo sviluppo delle abilità di conteggio di Gallistel e Gelman (1992), l'altra è la teoria dei contrassegni di riferimento di Trick e Pylyshyn (1994).

Secondo Gallistel e Gelman per valutare la numerosità di insiemi con meno di cinque elementi gli esseri umani adulti solitamente contano preverbalmente, mentre per valutare la numerosità di insiemi più numerosi, gli esseri umani adulti solitamente contano verbalmente. Secondo questa teoria, è la differenza tra questi due modi di contare a causare l'incremento dei tempi medi di reazione per insiemi con più di quattro elementi. La differenza tra contare verbalmente e contare preverbalmente non consiste nell'emettere o meno dei suoni quando si conta ma, secondo i due ricercatori, consiste, invece, nelle rappresentazioni mentali di cui i soggetti fanno uso in questi processi cognitivi. Quando un soggetto conta verbalmente, ripete mentalmente (o emette in modo udibile) parole come "uno", "due", "tre", per enumerare gli elementi dell'insieme. Al contrario quando un soggetto conta preverbalmente, non emette né ripete mentalmente delle parole, ma usa delle rappresentazioni di altro tipo, delle grandezze, per enumerare gli elementi dell'insieme.

Secondo questa teoria, l'incremento dei tempi medi di reazione per insiemi di oggetti superiori a quattro dipende dal fatto che per essi non è possibile attivare il conteggio preverbale ed è quindi necessario contare verbalmente. Questo processo è però più lento e può condurre ad errori di conteggio, la probabilità di fare errori aumenta con l'aumentare del numero di elementi da contare (Gallistel e Gelman, 1992).

Mentre secondo la teoria dei contrassegni di riferimento di Trick e Pylyshyn (1994), quando un soggetto analizza visivamente una scena (o un'immagine), deve distinguere ciascun oggetto dagli altri e dallo sfondo. Quando un elemento viene distinto dagli altri, gli viene assegnato un contrassegno (o FINST, Fingers of Instantiation). Solo un piccolo numero di contrassegni è disponibile e lo stesso contrassegno non può essere assegnato contemporaneamente a due elementi diversi. Quest'ultima assunzione sembra essere confermata dal fatto che in fase pre-attenzionale, in altre parole prima di iniziare a spostare l'attenzione su aree diverse della scena una dopo l'altra, i soggetti riescono a seguire i movimenti di circa quattro elementi (Ulmann 1981, Pylyshyn e Storm 1988, McKeever 1993).

Ora, se dobbiamo contare un insieme con meno di cinque elementi nel nostro campo visivo, a ciascun elemento viene automaticamente assegnato un unico contrassegno nel corso dell'analisi visiva. Tutto quello che dobbiamo fare in più, è assegnare una parola-numero a ciascun contrassegno ("uno", "due", "tre", ecc.). L'ultima parola assegnata ci dirà qual è il numero di elementi dell'insieme. Tuttavia, se il numero degli elementi nel campo visivo è maggiore di quattro, non avremo un numero immediato di contrassegni per assegnare a ciascun elemento un unico contrassegno. Dovremmo, dunque, prima distinguere (assegnando un contrassegno a) un gruppo di elementi non superiore a quattro, assegnare una parola-numero a ciascun contrassegno. Poi distinguere un altro gruppo di elementi non superiore a quattro (riassegnando i contrassegni a questi nuovi elementi), assegnare una parola-numero a ciascun contrassegno, ecc. Infine fare il totale. Questo è senza dubbio un processo lungo e laborioso che, secondo gli autori, oltre ad introdurre la possibilità di errore determina la maggiore lentezza necessaria a individuare gli elementi di insiemi maggiori di 4.

Sia la teoria dei contrassegni di riferimento, che la teoria della memoria di lavoro, attribuiscono il *subitizing* a limitazioni di capacità. Ma nella teoria dei contrassegni di riferimento, la limitazione di capacità riguarda il numero di elementi che possono essere individuati contemporaneamente (a cui può essere

assegnato un contrassegno di riferimento) in una scena visuale. Nella teoria della memoria di lavoro, la limitazione di capacità riguarda la quantità di informazione complessiva che può essere ritenuta nella memoria di lavoro. Sia la teoria del contare verbale e non verbale che la teoria dei contrassegni di riferimento rendono conto di alcuni dei dati fondamentali che caratterizzano il fenomeno del *subitizing*.

1.2.2 Gli studi di Dehaene

Dehaene (2000) ritiene che il *subitizing* si basi sulla capacità del nostro sistema visivo di localizzare gli oggetti nello spazio. A suo parere le aree occipito-parietali del cervello contengono insiemi di neuroni che estraggono con rapidità, in parallelo attraverso il campo visivo, la posizione degli oggetti che ci circondano. Egli ritiene che queste aree codifichino la presenza degli oggetti indipendentemente dalla loro grandezza e dalla loro esatta identità e che continuino a codificare gli oggetti anche quando essi vengono nascosti alla vista. L'informazione ottenuta verrebbe normalizzata per la misura e l'identità degli oggetti e idealmente astratta per alimentare un accumulatore, un circuito cerebrale che funziona come una calcolatrice, in grado di tenere un registro di diverse grandezze numeriche. Si tratta di un vero e proprio *sesto senso numerico* che permette la percezione del numero allo stesso modo di quella del colore, della forma o della posizione degli oggetti e offre, sia all'animale che all'uomo, un istinto del numero, un'intuizione diretta delle quantità numeriche. La sua ipotesi è che, quando facciamo una stima di un numero di oggetti, queste aree decompongono molto rapidamente lo spazio che ci circonda in oggetti discreti. A questo punto, non resta che fare, con l'aiuto dell'accumulatore, il totale approssimato degli oggetti così trovati per ottenere il loro numero. La precisione dell'accumulatore, secondo l'autore, decresce all'aumentare dei numeri, così che diviene sempre più difficile distinguere un numero n dai suoi vicini $n+1$ e $n-1$. Oltre il numero 4, dobbiamo contare gli

oggetti: il nostro accumulatore continua a fornirci una stima del numero, ma la sua precisione non è più sufficiente per scegliere con esattezza la parola giusta. Lo studio di due casi di pazienti che in seguito a lesioni cerebrali erano diventate incapaci di esplorare l'ambiente visivo e, in particolare, di contare gli elementi portò Dehaene a rilevare che esse incontravano, tuttavia, poche difficoltà a contare uno, due e spesso tre punti. Le pazienti esaminate con i numeri piccoli rispondevano molto velocemente, con grande sicurezza e, quasi sempre, senza sbagliare. La percezione dei numeri piccoli può, dunque, conservarsi intatta anche in presenza di una deficienza neurologica che rende fondamentalmente impossibile l'orientamento seriale dell'attenzione verso ciascun oggetto uno dopo l'altro. Questo ha condotto Dehaene a credere che il *subitizing* non passi per il conteggio, ma soltanto da un'estrazione parallela e spontanea degli oggetti dell'immagine.

1.2.3 Il modulo numerico di Butterworth

Butterworth (1999) parla di uno specifico *modulo numerico* innato che, fin dalla nascita, permette di riconoscere e distinguere la numerosità, di ordinare le cifre secondo un giudizio di grandezza e di processare piccole quantità. Questo modulo, secondo Butterworth, permette di classificare il mondo in termini di numerosità fino ad un massimo di 4 o 5 elementi (*subitizing*). Per *subitizing* egli intende un processo specializzato di percezione visiva che consente di determinare la numerosità di un insieme visivo di oggetti in modo immediato, senza contare.

Il modulo numerico non funziona per numerosità oltre il 4 o il 5 soltanto lo sviluppo e la trasmissione di strumenti culturali ampliano le sue facoltà, inoltre, esso rappresenta per Butterworth il nucleo centrale di tutte le nostre capacità matematiche e intorno a questo nucleo costruiamo capacità matematiche più avanzate, apprendendo dalla cultura da cui siamo circondati ciò che è già noto sui numeri; le capacità numeriche di ognuno dipenderebbero, quindi, da tre

fattori: il nucleo centrale innato, le conoscenze matematiche della cultura in cui siamo immersi e la misura in cui ognuno ha acquisito tali conoscenze (Butterworth, 1999).

Il progetto di ricerca che verrà presentato nel secondo capitolo che si basa sugli assunti di Dehaene e Butterworth, mira ad elaborare materiali e strategie da utilizzare nella pratica didattica. In particolare la ricerca vuole verificare se una metodologia didattica che potenzia il *subitizing*, già alla scuola dell'infanzia, tramite strumenti che sfruttano il canale visivo non verbale, facilita il recupero dei fatti aritmetici e il potenziamento del calcolo mentale alla scuola primaria. Inoltre, se questa procedura è efficace in particolare con studenti in difficoltà.

1.3 Le abilità di conteggio

Negli anni Settanta, quando si è incominciato ad affrontare il problema della nascita e dell'evoluzione del concetto di numero nei bambini, ha destato particolare interesse il delicato passaggio dalle competenze numeriche che i bambini hanno già nei primi anni di vita all'effettiva capacità di contare. Questo passaggio richiede al bambino l'abilità di mettere in relazione i concetti-numero con le parole-numero, deducendo il significato corretto delle parole-numero (Wynn, 1992, 1999). In particolar modo, le ricerche di quegli anni approfondirono i processi di quantificazione numerica, processi che erano stati giudicati poco rilevanti dal modello piagetiano. Oltre al *subitizing* fanno parte dei processi di quantificazione numerica anche il processo di conta e quello di stima.

La conta si fonda sulla sequenza numerica convenzionale ed è funzionale ad una quantificazione precisa di insiemi di qualsiasi grandezza mentre la stima consiste in un processo di valutazione che permette conteggi rapidi, ma approssimati, della numerosità delle collezioni (Liverta Sempio, 1997).

Butterworth (1999) considera il contare come il primo ponte tra le competenze innate del bambino rispetto alla numerosità e le conoscenze matematiche più elaborate possedute dalla cultura in cui è nato. Egli ritiene che ogni cultura permette di tenere traccia di numerosità molto elevate attraverso il conteggio con le parole-numero o i nomi di parti del corpo, di fare calcoli aritmetici più complessi dell'aggiungere o sottrarre uno da piccole numerosità, calcoli necessari per il commercio o gli scambi rituali. Egli afferma, inoltre, che chiunque, in un'epoca o nell'altra della vita, conta con le dita. Sembra ci sia una connessione molto diretta fra le dita, il conteggio e i numeri (Butterworth, 1999). Anche Dantzing (1965) afferma che ogniqualvolta esiste una tecnica di conteggio degna di questo nome, si è scoperto che è stata preceduta o accompagnata dal conteggio delle dita.

Gli studi sulla conta, iniziati a partire dagli anni settanta, mettono in luce la ricchezza di conoscenze sul numero del bambino prima del suo ingresso alla scuola dell'infanzia e forniscono una visione complessa del concetto di numero, che riguarda significati ed abilità diversificate. «Si tratta dello sviluppo di un fascio di capacità differenti che s'intrecciano e si connettono tra loro: capacità operative, come il mettere in corrispondenza biunivoca; apprendimenti culturali, come la conoscenza della serie standard delle parole-numero; comprensioni logiche, come la conservazione del numero» (Liverta Sempio e Marchetti, 1997:19).

L'acquisizione e lo sviluppo di tali conoscenze avviene in modo continuo e prolungato nel tempo, attraverso un processo composito, non lineare, in relazione all'esperienza e alla pratica d'uso dei numeri nei diversi contesti sociali del bambino. L'alunno utilizza le proprie capacità operative di conta attribuendo un significato al numero nelle situazioni problematiche quotidiane, verificando e modificando le proprie possibilità di applicazione.

I tre maggiori approcci teorici, che si occupano di come si conta sono: la *teoria dei principi del conteggio* di Gelman e Gallisten, la *teoria dei contesti diversi* di Fuson e la teoria di Wynn che rappresenta un'integrazione delle precedenti. La *teoria dei principi di conteggio* sostiene che i bambini piccoli

posseggano un concetto innato di numero che si evolve nell'acquisizione delle procedure di conta attraverso i principi della corrispondenza uno a uno, dell'ordine stabile, della cardinalità, di irrilevanza dell'ordine e di astrazione. Il meccanismo del conteggio non verbale sarebbe la base dei principi che guidano l'abilità di conteggio verbale. La *teoria dei contesti diversi* ipotizza che i principi di conteggio e di calcolo, pur essendo abilità specifiche ed innate, si consolidano attraverso esercizi ed imitazione; per i bambini piccoli le parole-numero non avrebbero alcun referente semantico di quantità, sarebbero solo una sequenza di suoni che possono essere recitati in modo meccanico. Il contesto in cui il bambino forma la propria conoscenza del numero, secondo Fuson, assume, invece, un ruolo basilare e porta gradualmente il bambino a comprendere il senso del contare. Sebbene i semanti dei numeri siano sempre gli stessi, le situazioni in cui essi sono utilizzati possono essere le più svariate, pertanto si possono riscontrare differenze sostanziali nei significati e nell'uso dei numeri (Lucangeli e Tressoldi, 2002). La *teoria di Wynn* sostiene che spiegare l'apprendimento della conoscenza numerica significa considerare le suddette teorie insieme; i bambini arrivano a sapere che le parole-numero si riferiscono a insiemi di elementi tramite la sintassi delle parole-numero e tramite i contesti in cui sono usate. La rappresentazione dei numeri deve, quindi, confrontarsi con il sistema linguistico, è a questo punto che i bambini arrivano a mettere in relazione le loro rappresentazioni preverbalì delle quantità numeriche con le relative parole-numero di cui hanno fatto esperienza in diversi contesti. Contare, che in precedenza era soltanto un'attività divertente, acquista improvvisamente un significato: contare serve a dire quanto (Dehaenne, 2000), anche se le parole-numero che esprimono le quantità, come ogni segno linguistico, hanno un rapporto convenzionale con il significato che sottintendono.

1.3.1 I principi del contare

Con la teoria dei principi di conteggio, Gelman e Gallistel (1978) avevano sostenuto che, fin dalla più tenera età, i bambini sono dotati di abilità innate di calcolo, che essi chiamano “principi”, che tendono ad evolversi attraverso tre metodi impliciti del “come contare”.

Il principio di iniettività (the one-one principle): è il principio secondo cui ad ogni elemento dell'insieme contato corrisponde una e una sola parola-numero. La corrispondenza uno-a-uno emerge, secondo gli autori, intorno ai due anni, in modo indipendente dalla corretta acquisizione delle parole-numero. Un bambino di tre anni a cui si chiede di contare ad alta voce un insieme di elementi, non riesce a portare a termine in modo adeguato il compito perché difficilmente è in grado di rispettare l'ordine convenzionale della linea dei numeri. Egli è comunque capace di attribuire uno, e un solo, valore agli oggetti e quindi di distribuire ad esempio una fetta di dolce ad ogni commensale e/o di mettere una zolletta in tutte le eventuali tazze presenti sul tavolo (Potter e Levy, 1968).

Per appaiare gli oggetti di un insieme con “segni” distinti, che sono i nomi dei numeri (etichette), si devono coordinare due processi diversi: quello di *riparazione* e quello di *etichettamento*.

Il processo di riparazione prevede che gli oggetti debbano essere trasferiti dalla categoria degli oggetti da etichettare (da contare) a quella degli oggetti già etichettati (già contati). Mentre il processo di etichettamento consiste nel trovare etichette, di volta in volta, diverse per ogni elemento da contare. Il principio di iniettività richiede il coordinamento ritmico dei processi di riparazione e di etichettamento: i due processi devono iniziare insieme, fermarsi insieme ed essere ‘in fase’ durante tutto il loro uso.

La tendenza dei bambini a indicare (con i gesti) quando contano, confermano l'importanza che essi attribuiscono al principio dell'iniettività nel coordinamento dei due processi di ripartizione e di etichettamento.

In questa fase, un bambino può incorrere in tre tipi di errori nel contare: 1) errori nel processo di “ripartizione”, ovvero spuntare un oggetto più di una volta o saltare un oggetto; 2) errori nel processo di “etichettamento”, ad esempio usare più volte la stessa etichetta; 3) fallimento nel coordinare i due processi, ossia continuare nel prelevare l’etichetta quando tutti gli oggetti sono nella categoria dei già contati o prelevare un numero di etichette diverso dal numero degli oggetti.

Il principio dell’ordine stabile prevede che le etichette usate per contrassegnare gli oggetti di un insieme (ossia i nomi dei numeri), debbano essere ordinate e pronunciate in un ordine stabile, cioè ripetibile. La lista di parole-numeri deve essere stabile e lunga quanto il numero degli oggetti presenti e non è certo semplice da acquisire. Gran parte dello sviluppo delle abilità numeriche coinvolge la memorizzazione delle parole che indicano i primi dodici o tredici numeri e le regole generative per le successive. La ricerca ci dice, infatti, che la mente umana, a differenza del computer, ha delle grandi difficoltà a formare delle liste lunghe, di parole arbitrarie, che possono essere richiamate in modo stabile.

Il principio di cardinalità sostiene che l’etichetta finale ha un significato speciale, a differenza delle precedenti, rappresenta una proprietà dell’intero insieme: è il numero cardinale dell’intero insieme e cioè il numero degli oggetti dell’insieme. Il bambino oltre ad essere capace di assegnare le etichette deve successivamente essere anche in grado di tirar fuori l’ultima etichetta assegnata e riconoscere che essa rappresenta la numerosità della collezione di oggetti.

Secondo *il principio di astrazione* i tre principi sopra elencati possono essere applicati a tutte le collezioni, sia con riferimento a entità fisiche che non fisiche (ad esempio oggetti solo pensati) e anche a schieramenti eterogenei.

I primi tre principi descrivono il funzionamento del processo del contare (come contare), essi possono essere applicati a tutte le collezioni di oggetti.

Il principio di irrilevanza dell’ordine indica, invece, che l’ordine del conteggio è irrilevante, così l’ordine nel quale gli oggetti sono etichettati è irrilevante, di

conseguenza l'oggetto contato è una 'cosa'. Le etichette verbali risultano, a questo punto, arbitrarie ed assegnate temporaneamente. Esse non appartengono all'oggetto in quanto tale e, alla fine del conteggio, il cardinale risulta essere sempre lo stesso.

Affinché i bambini comprendano che l'etichetta non appartiene definitivamente all'oggetto, devono essere in grado non solo di conoscere che l'oggetto continua ad essere una cosa (non è diventato uno o due) secondo il principio di astrazione, ma anche che le etichette sono arbitrarie e provvisorie, cioè non appartengono agli oggetti una volta che il conteggio è finito e che, a prescindere dall'ordine di conteggio, risulta sempre lo stesso numero cardinale. I bambini che imparano a contare conoscono i principi prima che le loro abilità siano pienamente sviluppate (Gelman e Gallistel, 1978). La loro prestazione è, naturalmente, influenzata dalla grandezza del numero, per cui i numeri grandi risultano più difficili (Fuson, 1988) e la padronanza dei tre principi non è del tutto sincronizzata: viene raggiunta prima quella dell'ordine stabile, poi quella della corrispondenza biunivoca tra parole-conta e oggetti e quella del principio di cardinalità. Fuson (1988) suggerisce che i bambini potrebbero notare il fatto che, quando contano un insieme "uno, due, tre", pervengono allo stesso numero ottenuto tramite il *subitizing* e questo li aiuta ad acquisire la consapevolezza che contare fino a n è un modo di stabilire che un insieme contiene n oggetti. Se, ripetendo il conteggio, essi si accorgono di essere giunti allo stesso numero ottenuto tramite il *subitizing*, si consolida in loro l'idea che ogni numero rappresenta una sola numerosità.

Piaget (1952) fu tra i primi a rilevare che avere il pieno possesso del concetto di numerosità significa essere in grado di astrarre dalle caratteristiche percettive non rilevanti dell'insieme da contare, per cui non si pensa che ci siano più oggetti solo perché, ad esempio, sono più sparpagliati anziché raggruppati. I bambini tra 4 e 6 anni sembra non vengano più tratti in inganno dagli aspetti percettivi e siano in grado di affidarsi ai dati strettamente connessi alla numerosità, come la corrispondenza e il conteggio. Utilizzando termini

piagetiani potremmo dire che il numero viene conservato nonostante i cambiamenti percettivi.

1.4 Lo sviluppo delle abilità di calcolo

L'acquisizione delle abilità di calcolo riguarda l'insieme dei processi che consentono di operare sui numeri tramite operazioni aritmetiche (Cornoldi, 2007).

I bambini nelle prime fasi di apprendimento dell'aritmetica utilizzano la capacità di contare. Le parole-numero hanno sia una sequenza, sia un significato di numerosità (o cardinalità). Secondo Fuson e Know (1992) perché le parole-numero possano essere usate nell'addizione e sottrazione, devono acquisire il loro significato cardinale. I bambini per rappresentare la numerosità dell'addendo spesso usano oggetti, soprattutto le dita, che fungono da supporto alla loro attività di conteggio.

Tre sono le principali fasi nello sviluppo del contare come strategia di addizione (Carpenter e Moser, 1982): 1) il contare tutto - *count-all*: i bambini contano separatamente gli elementi dei due insiemi da addizionare, successivamente li riuniscono e contano nuovamente tutti gli elementi dell'insieme somma; 2) il *contare avanti a partire dal primo*: i bambini contano il numero degli elementi del secondo insieme a partire dal valore cardinale del primo, "tenendo traccia" dei passi compiuti ($4+2$); 3) il *contare avanti a partire dal maggiore* ossia contano il numero degli elementi dell'insieme minore a partire dal valore cardinale del maggiore "tenendo traccia" dei passi compiuti ($2+4$ - commutativa addizione – $4+2$).

Gli stadi della conta non sono nettamente distinti, i bambini possono passare da uno stadio all'altro a seconda della situazione. Gli studi di Carpenter e Moser (1982) hanno evidenziato che vi è un forte passaggio allo stadio del *contare avanti a partire dal maggiore* nei primi sei mesi di scuola. Questo stadio evidenzia la comprensione del fatto che, indipendentemente dall'ordine degli addendi, la somma fornisce sempre lo stesso risultato. Questa consapevolezza sembra derivare dalla comprensione degli effetti dell'unione di due insiemi.

Carpenter e Moser (1982) hanno classificato le principali strategie che i

bambini utilizzano nei compiti di addizione e sottrazione, strutturandole su quattro livelli: due livelli per l'addizione, due livelli per la sottrazione.

Oltre alle strategie già citate, *count-all* e *count-on*, Carpenter e Moser parlano di altri due tipi di strategie utilizzate dai bambini nei compiti di addizione: la strategia del *know fact*, secondo la quale i bambini danno la risposta direttamente, senza contare, recuperando conoscenze fattuali della memoria (per esempio sanno che $5+5=10$); e quella del *derived facts* i bambini utilizzano fatti aritmetici conosciuti per derivare ulteriori conoscenze (per esempio, dicono che $16+4$ è 19, basandosi sul fatto conosciuto che $6+3$ fa 9 e che $10+9$ fa 19).

Nei compiti di sottrazione, secondo gli autori, i bambini utilizzano altre strategie. Una è la strategia del *take-away* -portare via- i bambini contano gli elementi dell'insieme più grande, contano il sottoinsieme da sottrarre e infine contano il sottoinsieme che rimane. La seconda strategia prevede che i bambini concettualizzano il valore cardinale, di uno dei due insiemi e usino una delle due seguenti procedure: *count-back* (contare all'indietro) (es. $8-5$) i bambini partono dal valore cardinale del maggiore (8), contano all'indietro la sequenza numerica fino a trovare la cardinalità del secondo insieme (5) e tengono traccia dei passi compiuti; oppure *count-on* (contare avanti) i bambini partono dal valore cardinale del secondo insieme, il più piccolo (5), contano in avanti la sequenza numerica fino a trovare la cardinalità del primo insieme (8). Anche per la sottrazione esistono fatti aritmetici conosciuti e derivati.

Nell'apprendimento delle procedure di calcolo, i segni sono le prime informazioni che vengono elaborate, devono infatti essere riconosciuti per capire la natura dell'operazione, solo così si accede ai fatti aritmetici, combinazioni frequenti di numeri che vengono risolte attraverso il recupero dei risultati in memoria; se il compito non consente l'accesso diretto alla risposta entra in gioco la conoscenza procedurale che opera diversamente per il calcolo a mente e per quello scritto.

Secondo Baroody (1983) si passa da processi lenti di conteggio, all'uso di regole applicate in modo automatico; l'uso di regole procedurali generalizzabili

risulta essere cognitivamente più economico rispetto alla memorizzazione di ogni operazione base. Una confusione nell'uso di tali regole potrebbe causare effetti d'interferenza fra le operazioni. Se nei primi anni di scuola è fondamentale l'uso di strategie di conteggio, in seguito queste tendono ad essere sostituite da strategie di recupero mnemonico dei risultati dei calcoli e delle procedure. Siegler e Mitchell (1982) hanno rilevato in bambini di scuola dell'infanzia l'uso di almeno quattro strategie utili allo svolgimento di addizioni mentali: il conteggio con le dita esplicito, la strategia delle dita senza evidente conteggio, il conteggio verbale ad alta voce senza supporto delle dita e la mancanza di una strategia desumibile dal comportamento. La scelta della strategia non sarebbe guidata dalla consapevolezza metacognitiva, si tratta di un automatismo basato sul criterio interno del "livello di fiducia", ovvero di una soglia sotto la quale il soggetto non si sente sicuro nel dare la risposta corretta. All'inizio si fissa il "livello di fiducia" relativo alla strategia di recupero, se la sicurezza nella risposta supera questa prima soglia, il bambino tenta di recuperare la risposta in memoria, altrimenti rappresenta gli addendi in modo visibile, sulle dita, o attraverso un'immagine mentale. Se anche questa procedura è insufficiente, il bambino conta gli oggetti rappresentati dando l'ultimo numero come risposta. La strategia utilizzata sarebbe dunque quella del recupero e le altre sarebbero usate solo in caso che questa fallisca. Siegler (1982) ha poi aggiunto il concetto di "forza di attivazione" che incide sull'accuratezza e sulla velocità di esecuzione: la strategia di recupero non precede ogni altro procedimento ma è selezionata solo se la sua forza supera quella delle altre strategie associate; nella scelta del criterio di fiducia si aggiunge quello del tempo di ricerca in memoria, che non deve oltrepassare un limite prefissato. Con lo sviluppo e l'esercizio, la forza di attivazione del processo di recupero aumenta fino a divenire la strategia predominante. Ashcraft (1987) invece, ipotizza che nei primi anni di scuola i processi di recupero e le strategie ricostruttive di conteggio operino insieme; i bambini non hanno ancora memorizzato le operazioni, perciò attivano contemporaneamente regole dichiarative e procedurali usando la strategia più

veloce. In seguito si affida di più alla conoscenza dichiarativa in cui i calcoli con operatori ad una cifra sono rappresentati in memoria in una struttura a rete. Secondo questo modello negli adulti la conoscenza procedurale ha un ruolo marginale. Baroody (1983) rivaluta la conoscenza procedurale, sostenendo che essa rende più efficace il calcolo mentale: da processi basati su procedure lente di conteggio, si passa ad usare una serie di regole automatizzate che rendono il lavoro più economico rispetto alla memorizzazione delle operazioni di base, si riduce cioè la quantità di informazione dichiarativa contenuta in memoria. La maggior parte delle operazioni ad una cifra potrebbe essere eseguita grazie a una conoscenza procedurale. Le ricerche di Geary (1990) avvalorano l'ipotesi di una successione nell'acquisizione di strategie proposta da Carpenter e Moser: inizialmente i bambini usano la procedura detta *counting all*, alla fine del primo anno di scuola usano invece la strategia del *counting on*, in seguito una strategia più evoluta consente loro di guardare le dita senza contarle al fine di recuperare la risposta. Levine (1993), studiando lo sviluppo delle abilità di calcolo verbale e non nei bambini di 4-6 anni, ha trovato che già a 4 anni i bambini eseguono correttamente operazioni di addizione e sottrazione non verbale con piccole quantità di oggetti, mentre i compiti verbali risultano più difficili. In una successiva ricerca di Huttenlocher, Jordan e Levine (1993) si riscontra che l'abilità di calcolo è già presente a 2-3 anni, quando i bambini sanno discriminare la numerosità di piccoli insiemi eseguendo semplici addizioni e sottrazioni presentate visivamente tramite oggetti concreti. Per quanto riguarda le operazioni con risultati superiori al 100, queste non possono essere spiegate con il solo uso dei processi di recupero; alcuni studiosi ritengono che si proceda per risultati parziali, altri sostengono il ruolo della conoscenza procedurale. Nel caso delle addizioni di due cifre, Beishuizen (1993) osserva due strategie: la scomposizione in decine e unità di entrambi gli addendi -strategia meno evoluta- oppure unicamente del secondo addendo, che viene poi sommato o sottratto al primo -strategia più evoluta - (Cornoldi, 2007). Lo stesso Cornoldi (2007) afferma che ciò che conta maggiormente è essere consapevoli che nel calcolo a mente la conoscenza procedurale consente

di operare scomposizioni sui numeri per ottenere operazioni intermedie più semplici, mentre nel calcolo scritto essa ordina la forma grafica della specifica operazione, l'incolonnamento dei numeri, la direzione spazio/temporale delle azioni, in altre parole l'ordine in cui le operazioni parziali vanno recuperate in memoria, e, infine, il modo di utilizzarle tramite le regole vere e proprie.

1.4.1 I modelli cognitivi di processamento numerico

Tra i modelli che cercano di spiegare il funzionamento della rappresentazione dei numeri e dei processi di calcolo ricordiamo in primo luogo il modello di McCloskey, Caramazza e Basili (1985), che considera a un livello generale i meccanismi cognitivi che mediano la comprensione e la produzione di numeri arabi e verbali e l'esecuzione di calcoli aritmetici. Il *modello del triplice codice* di Dehaene e Cohen (1992, 1995), assume, invece, che ci siano essenzialmente le categorie di rappresentazioni mentali nelle quali i numeri possano essere manipolati nel cervello umano.

Il punto di forza del modello neuropsicologico di McCloskey, Caramazza e Basili (1985) è la modularità delle sue componenti. Il modello ipotizza che la rappresentazione mentale della conoscenza numerica, oltre ad essere indipendente da altri sistemi cognitivi, sia strutturata in tre moduli, a loro volta distinti funzionalmente: il *sistema di calcolo*, il *sistema di comprensione* e il *sistema di produzione numerica* (Figura 2). Questo modello prevede che il processamento delle informazioni numeriche sia attuato da questi tre moduli, funzionalmente distinti, che sono in comunicazione tra loro per mezzo di un singolo codice che opera con quantità astratte.

Modello Neuropsicologico di McCloskey

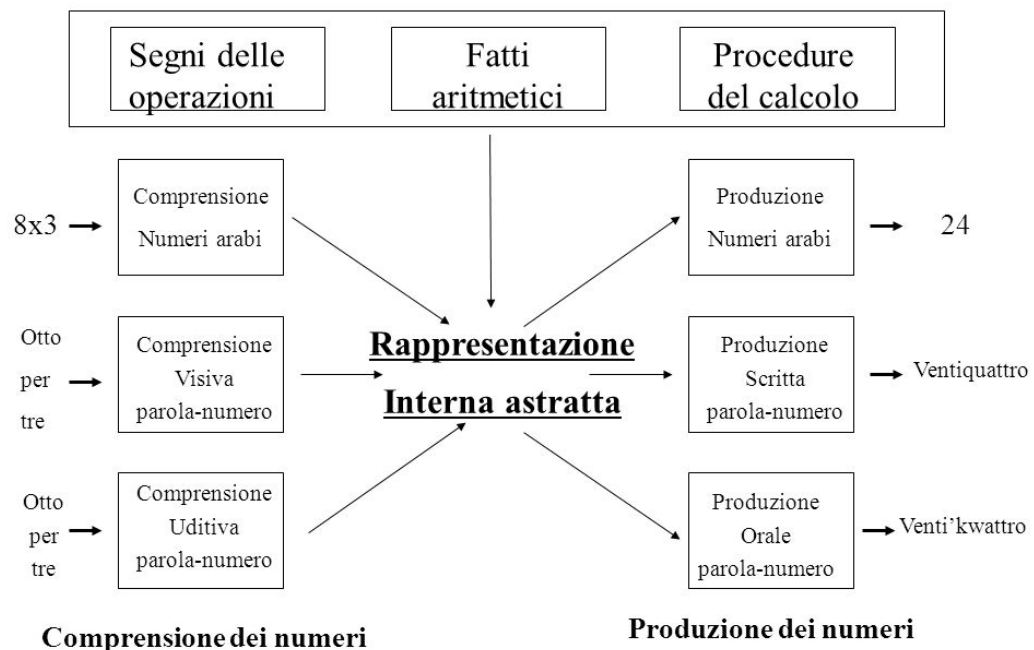


Figura 2: <http://slideplayer.it/slide/954145/>

Il *sistema di comprensione* trasforma la struttura superficiale dei numeri-input, i numeri espressi in cifre (7, 3, 12) e le parole ad essi corrispondenti (sette, tre, dodici) in un formato di tipo quantitativo astratto. Questo tipo di rappresentazione fornisce le basi per le successive elaborazioni relative al calcolo numerico e al sistema di produzione.

Il *sistema di calcolo* utilizza le rappresentazioni assunte come input e le manipola attraverso tre componenti: i segni delle operazioni, i fatti aritmetici e le procedure di calcolo.

Il *sistema di produzione* riceve gli output di tipo astratto dal sistema di comprensione o dal sistema di calcolo e li traduce in una specifica struttura superficiale: i numeri espressi in cifre o in parole.

Siccome i tre moduli sono funzionalmente indipendenti, i processi ad essi relativi possono essere eseguiti in modo separato. Un danno cerebrale può colpire selettivamente una delle funzioni e lasciare intatte le altre. Questo

modello ha così permesso la comprensione dei disturbi caratteristici riscontrati in alcuni pazienti con difficoltà nell'elaborazione dei numeri e ha portato all'identificazione di differenti forme di discalculia, adottate poi anche nella classificazione delle discalculie evolutive. Questo modello è detto semantico perché prevede che ogni operazione sia mediata dalla rappresentazione astratta della quantità numerica. Quando tale rappresentazione semantica del numero è acquisita, non viene più conservata alcuna informazione relativa al formato di presentazione dello stimolo (arabico o verbale) che quindi non può interferire nella produzione della risposta. Il passaggio da una rappresentazione numerica a una letterale e da una letterale ad una numerica, detto *transcoding numerico*, è portato a termine grazie ad un processo di comprensione che traduce gli input in una rappresentazione interna di tipo semantico. Questo sistema di produzione converte poi la rappresentazione semantica nell'output richiesto.

Il modello esaminato sostiene che i processi di calcolo non operino mai direttamente sui numeri in notazione arabica o verbale, ma solo sulle rappresentazioni interne semantiche.

Il *modello del triplo codice* proposto da Dehane (1992) prevede, invece, che alcune operazioni avvengano attraverso una codifica asemantica che non richiede cioè l'accesso alla rappresentazione della quantità. Suppone che l'elaborazione dei numeri operi sulla base di tre differenti tipi di codice: *uditivo-verbale*, *arabico-visivo* e della *rappresentazione analogica di grandezze* (Figura 3).

MODELLO DI DEHAENE

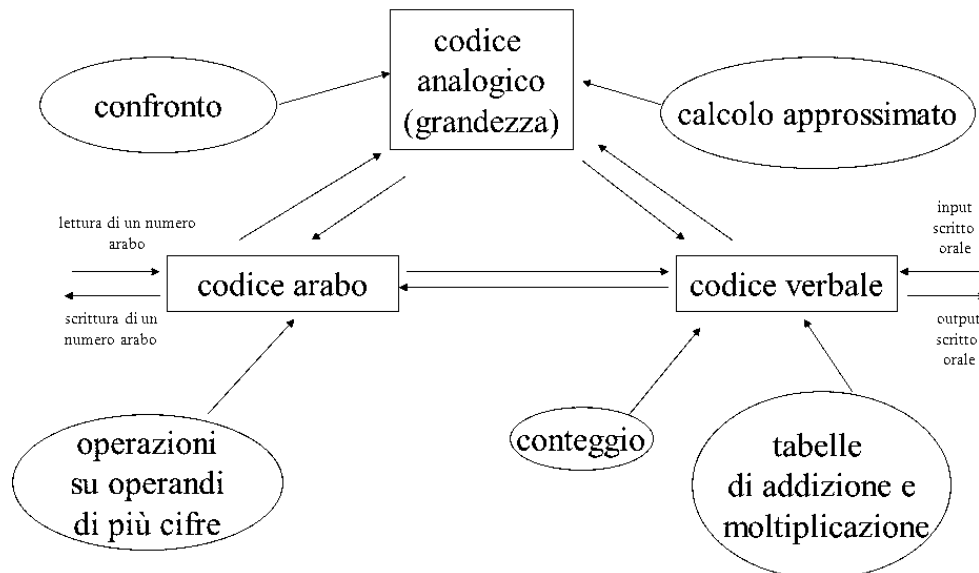


Figura 3: http://images.slideplayer.it/3/954145/slides/slide_27.jpg

Il codice *uditivo-verbale* si fonda su abilità che usano le notazioni numeriche verbali e sfruttano i sistemi di elaborazione più generali del linguaggio parlato e scritto, come la conta verbale ed il recupero dei fatti aritmetici. La serie verbale dei numeri, secondo questa prospettiva, non si differenzia da altre sequenze verbali (es. le lettere dell'alfabeto).

Il codice *arabico-visivo* si basa invece su abilità che fanno uso delle notazioni sotto forma di cifre e richiedono la padronanza di sistemi di notazione posizionale specifici, come quello arabo. Sono queste le abilità che comprendono il calcolo dei numeri a più cifre e il giudicare se un numero è pari o dispari.

L'ultimo codice, quello della *rappresentazione analogica di grandezze*, si fonda su abilità che operano con i numeri sotto forma di grandezze: il *subitizing*, il calcolo approssimato, la stima, il confronto di quantità. Queste abilità, presenti anche negli animali, emergono nell'uomo, prima dell'acquisizione del linguaggio, come abbiamo già visto in precedenza. Tale

sistema tiene conto delle competenze numeriche preverbalì descritte da Gallistel e Gelman (1992).

Secondo i due modelli appena analizzati, il codice di rappresentazione della grandezza, in modo simile al codice di rappresentazione interna astratta dei numeri, permette di determinare le caratteristiche degli stimoli trattati, oltre a costituire un passaggio obbligato in alcuni compiti numerici e aritmetici, quali la stima e il calcolo approssimato. Non risulta che esso sia, però, di per sé indispensabile per altre attività, tra cui il calcolo scritto e i fatti aritmetici. Quindi potremmo considerare la relazione tra l'elaborazione del materiale numerico e l'elaborazione semantica come una via indiretta che viene attivata solo per alcuni compiti e non necessariamente per altri.

Alcuni studi effettuati su bambini con deficit cognitivo ma con ottime abilità di transcodifica numerica o esecutiva del calcolo, sottoposti a prove di codifica semantica, sembrerebbero confermare almeno in parte l'esistenza di questa via indiretta (Biancardi, Mariani e Pieretti, 2003).

1.5 Il calcolo mentale

Il senso del numero viene sviluppato molto precocemente dai bambini. Sin da molto piccoli assimilano il senso del numero attraverso le attività e le esperienze alle quali sono esposti quotidianamente all'interno dei diversi contesti socio-culturale di appartenenza. Essi acquisiscono "il senso del numero" come insieme di più abilità quali la valutazione delle quantità, la stima e il calcolo mentale (Dantzig, 1954).

Le ultime scoperte nel mondo della ricerca tendono a evidenziare le grandi potenzialità in ambito matematico dei bambini fin dalla nascita.

Le nuove teorie dello sviluppo quali quelle di Butterworth (1999) e Dehaene (2000), secondo cui, a differenza di quanto affermato da Piaget, non ricaviamo le nostre competenze strumentali in fatto di numeri dalle esperienze concrete verso i 5 anni, ma le riceviamo in dono fin dalla nascita come una dote naturale. Essi evidenziano come i bambini sarebbero in grado di compiere da subito operazioni con le quantità, purché queste siano in numero massimo di tre e siano loro presentate in modo conforme alle caratteristiche delle loro menti; esse verranno manipolate sulla base del loro ricordo visivo.

Il calcolo di numerosità e il calcolo mentale sono competenze indipendenti dal sistema notazionale dei numeri scritti. In passato come oggi, prima di incontrare le cifre scritte, i bambini sono in grado di percepire le quantità e le loro variazioni. I numeri scritti sono quindi un prodotto storico che diviene accessibile in età scolare mentre la capacità di gestire quantità avviene attraverso l'utilizzo di immagini interne della mente che lavora in modo intuitivo.

Per Resnick (1995) le conoscenze in alcuni domini matematici prendono forma attraverso ragionamenti protoquantitativi su materiali concreti, senza riferimento a numeri specifici, e si articolano successivamente su tre livelli di pensiero sempre più astratto (ragionamenti quantitativi legati a un particolare contesto, ragionamenti numerici astratti e ragionamenti sulle operazioni). La

conoscenza è costruita ad ogni livello usando ciò che il bambino ha appreso dal livello precedente e le nuove scoperte derivanti dalle esperienze attuate.

Questo aspetto del numero, quindi, è dominato dal bambino precocemente, altri, al contrario, sono appresi per imitazione, anche se egli non si limita a ripetere esattamente il comportamento di chi gli sta intorno, ma lo generalizza con pertinenza a nuove situazioni.

Le prospettive degli studi di Sowder (1992), Baroody (1989 e 1999), Greeno (1991), all'interno delle quali vengono apprezzate, anzi incoraggiate e ritenute prioritarie, le procedure mentali e informali utilizzate da ciascun alunno, sono ritenute importanti nella costruzione del concetto di numero anche dal punto di vista del calcolo mentale.

Il calcolo mentale favorisce, infatti, lo sviluppo del senso del numero, inteso come «una rete concettuale ben organizzata che consente di collegare il numero e le proprietà delle operazioni e di risolvere problemi numerici in modi flessibili e creativi» (Sowder, 1992:376); ed è un processo di pensiero in cui ogni alunno è impegnato nella costruzione delle proprie conoscenze e nella generazione di strategie mentali significative per lo sviluppo del pensiero matematico.

Il calcolo mentale richiede, l'intervento della memoria a lungo termine come taccuino da cui recuperare “appunti veloci” (i risultati parziali -fatti derivati- o gli arrotondamenti effettuati sui numeri) e si serve di procedure personali che, raramente, ricalcano l'algoritmo formale insegnato a scuola. Esso diventa flessibile, presuppone e allo contemporaneamente potenzia nell'allievo la comprensione della struttura decimale dei numeri, rendendo i bambini efficienti calcolatori capaci di scegliere strategie veloci ed efficaci per effettuare operazioni.¹⁴

Alla luce di quanto enunciato sopra risulta importante dare ampio spazio al calcolo mentale nell'azione di insegnamento della matematica così come auspicato anche da molti ricercatori (Treffers, 1991; Sowder, 1992; Greeno,

¹⁴ http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Lafforgue_Calcolo%20scuola%20primaria.pdf (visitato il 14/12/2014).

1991; De Corte, Verschaffel & Greer, 2000). Sowder (1992) afferma, ad esempio, che l'istruzione sul calcolo mentale può fornire una strada per sviluppare il senso del numero o l'intuizione quantitativa.

Anche le linee guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con disturbi specifici di apprendimento si allineano a questa nuova visione dell'insegnamento-apprendimento della matematica. All'interno del Decreto Ministeriale n° 5669 del 2011 si evidenziano i punti seguenti:

- si raccomanda di usare prevalentemente l'uso di strategie di calcolo a mente nella quotidianità scolastica.
- si auspica l'utilizzo di attività quasi giornaliere, di breve durata, diversificate e ludiformi che privilegino il calcolo mentale rispetto a quello allo scritto, che sarà ovviamente trattato a livello procedurale.
- si sottolinea che se l'insegnante sa adoperare metodi didattici flessibili e corrispondenti alle qualità cognitive individuali, il potenziamento non resterà disatteso.

CAPITOLO II - LA RICERCA-AZIONE

La ricerca-azione costituisce la metodologia fondante della ricerca della matematica, diversamente da altre discipline scientifiche per questo di seguito vengono illustrati i punti salienti. Per la contestualizzazione della metodologia rilevante dal punto di vista della sperimentazione oggetto di questa tesi si rimanda al Capitolo III paragrafo 4.

2.1. Le origini del termine e la sua diffusione

Il termine ricerca-azione o ricerca-intervento nasce dall'autore tedesco Kurt Lewin, psicologo sociale, il quale coniò la parola *action research*. Lewin si pose il problema della *Action Research* quando iniziò a lavorare nel campo delle scienze sociali, in particolar modo sui problemi delle minoranze etniche negli Stati Uniti negli anni '40. Ciò che rappresentò un'autentica innovazione nel metodo e nel processo di ricerca da parte dello studioso fu la progressiva scoperta del fatto che il processo conoscitivo finiva con il divenire un'azione sociale proprio nel momento in cui la popolazione veniva coinvolta. Lewin pensò allora di enfatizzare questo aspetto e di attribuire alla popolazione capacità e competenze conoscitive, coinvolgendola nel processo di ricerca stesso. Si scoprì così, oltre al fatto che il processo di conoscenza aveva già le caratteristiche dell'azione, che la conoscenza più efficacemente utilizzabile ai fini dell'azione sociale era proprio quella che emergeva nel processo conoscitivo.

L'*Action Research* guarda in maniera costruttiva ai principi che ne verificano la validità: essa prende origine dal riconoscimento, attraverso la ricerca nelle scienze psicologiche, della contingenza di azione e conoscenza nei processi di apprendimento. Lewin per primo ha indicato le procedure salienti della ricerca-azione distinguendole in: pianificazione, azione, osservazione e riflessione, con il fine di migliorare i sistemi sociali. Nel 1948 sosteneva già

che la ricerca-azione fosse un metodo necessario per la realizzazione di programmi per gruppi minoritari nel sociale.

Questi stadi, identificati da Lewin, sono stati in seguito ampliati nel 1976 da Cunnigham, il quale prevedeva per ogni fase un momento di valutazione che serviva a decidere se proseguire o meno verso lo step successivo; l'autore stabilì per questo tipo di ricerca dei parametri specifici:

- la necessità di creare la collaborazione e il confronto tra i ricercatori e gli operatori, sia per quanto riguarda la definizione dei problemi da indagare che per ciò che concerne lo svolgimento della ricerca. La ricerca è realizzata da tutti membri della comunità che vi partecipano, seguiti da esterni, i consulenti, i quali si pongono in un rapporto di parità;
- il superamento da parte del ricercatore della pretesa di giungere alla neutralità nella ricerca. Egli non si limita a conoscere un fenomeno, ma esso deve diventare agente di un cambiamento. La ricerca-azione si concentra sulla risoluzione di un problema sia come epilogo dei fatti che come progettazione di interventi all'interno di contesti specifici;
- la necessità di porre attenzione alle dinamiche sociali e alle situazioni ambientali del contesto educativo, viste come variabili per lo svolgimento della ricerca. Per questo la ricerca-azione prevede un esame articolato delle dinamiche di gruppo e delle forze sociali che aiutano o meno il suo svolgimento, anche utilizzando le tecniche di gestione dei conflitti che aiutano gli operatori a concordare le loro strategie d'intervento.

2.2. Caratteristiche della ricerca-azione

Si intende per ricerca-azione un modo di concepire la ricerca che si pone l'obiettivo non tanto di approfondire determinate conoscenze teoriche, ma di

analizzare una pratica relativa ad un campo di esperienza (ad esempio, la pratica educativa) da parte di un attore sociale con lo scopo di introdurre, nella pratica stessa, dei cambiamenti migliorativi. Essa è una metodologia che si basa sull'alternanza tra azione e riflessione per risolvere un problema: viene formulata una prima ipotesi e si agisce, si analizzano i risultati ottenuti e si modifica l'ipotesi di partenza.

Si differenzia notevolmente dalle altre tipologie di sperimentazione innanzitutto perché mantiene il legame con il ricercatore e, secondariamente, perché è un sistema in divenire che ha l'obiettivo di eliminare la frattura di tempo che si crea tra la raccolta dei risultati e la loro messa in pratica. Alla ricerca-azione interessa la coerenza che nasce dal senso, dal significato che determinati fatti assumono per un individuo o per un gruppo. Guardando in cosa si differenzia la ricerca-azione dal metodo sperimentale, è possibile notare che nella prima non si ha un intervento prefissato, il ricercatore permette che l'ipotesi emerga durante il processo e lui stesso ne modifica l'andamento attraverso il monitoraggio continuo. L'obiettivo è quello di risolvere i problemi provando diverse strade. Nel metodo sperimentale invece si tenta di modificare la variabile indipendente, per dimostrare che è la causa dell'effetto ottenuto. È dunque comprensibile come gli sperimentalisti accusino i ricercatori della mancanza di quell'elemento che all'interno della ricerca è caratterizzante: il distacco dell'osservatore dalla realtà. Inoltre viene fatto notare che la modificazione in itinere del processo, può portare alla perdita del controllo della situazione. D'altro canto le critiche dei ricercatori verso gli sperimentalisti sono altrettanto motivate, in quanto sostengono che la loro volontà a scomporre il metodo in variabili da tenere sotto controllo, porti a una perdita di significatività.

Sul piano scientifico i ricercatori condividono le seguenti caratteristiche della ricerca-azione:

- Approccio olistico al problema senza parcellizzazione della ricerca in aspetti settoriali o unilaterali; la ricerca-azione tenta di superare il

modello che analizza un problema scomponendolo in problemi più semplici.

- Significatività del tema di ricerca per gli attori, cioè per gli educatori e per i ricercatori; questi soggetti riflettono sui miglioramenti da apportare al problema che devono risolvere.
- Disponibilità del ricercatore a negoziare con gli educatori/attori le azioni da compiere; per prendere decisioni all'interno di un gruppo l'educatore detiene un ruolo più calzante per percepire e manifestare i problemi che possono nascere durante il compiersi dell'azione.
- Intervento del ricercatore nelle azioni; il ricercatore diviene attore e perciò instaura all'interno del gruppo, dei rapporti educativi. Questo atteggiamento gli permette di ottenere una percezione globale del divenire dell'azione.
- Assenza di un metodo educativo predefinito da applicare, ma la sua costruzione insieme al gruppo della ricerca-azione; a partire da alcuni principi strategici e sulla base delle reazioni rilevate in corso d'opera, intervenendo direttamente durante lo svolgimento della ricerca, si incide nella definizione dei problemi e nella scelta dei metodi di ricerca. Il modello di partenza viene spesso modificato proprio perché la metodologia viene costruita in itinere.
- Perseguimento dello sviluppo personale e professionale degli operatori/attori della ricerca-azione; gli attori cercano di migliorare la loro professionalità acquisendo una metodologia di lavoro che gli permetta di crescere anche a livello personale.
- Emancipazione degli attori; i partecipanti diventano capaci di operare autonomamente grazie al miglioramento dei processi educativi garantendo la validità del metodo sperimentale.
- Impiego di strumenti descrittivi per la valutazione dei risultati durante e alla fine della ricerca; tali strumenti vengono ricavati grazie al contributo di varie scienze come la fenomenologia, l'antropologia

culturale e la psicologia sociale. Si focalizza l'attenzione sulla descrizione dei fenomeni cercando di comprenderne la complessità.

- Produzione di un mutamento sociale; si tenta di definire nettamente la differenza tra la ricerca pedagogica basata maggiormente sulla conoscenza della realtà, e la ricerca-azione che si propone di cambiarla. Gli operatori della ricerca-azione hanno lo scopo di attuare un mutamento politico-sociale.

Pourtois (1984) considera i seguenti punti chiave della ricerca-azione:

- il passaggio dalla centralità del concetto di permanenza alla centralità di quello di cambiamento;
- dalla centralità del concetto di razionalità a quello di effervescenza.

La sua attenzione si focalizza però sul passaggio iniziale della ricerca, nel quale si individuano: la vita, quello che succede, e i fatti, su cui si indaga, ovvero i dati.

La ricerca-azione permette agli attori di possedere la capacità di agire tenendo in considerazione gli obiettivi che si basano su aspetti filosofici, sociali e politici, Pourtois perciò vede in questa metodologia la base di un progetto sociale e scientifico: essa alimenta delle contraddizioni che la distinguono sia dalla ricerca operativa, riguardante l'applicazione del metodo scientifico a problemi specifici relativi all'azione quotidiana, che da quella nomotecnica, la quale si propone di stabilire leggi generali.

Per Barbier (2007) la ricerca-azione, prevedendo l'“implicazione” degli attori nella ricerca, in quanto soggetti e non oggetti, presuppone una conversione epistemologica rispetto alla ricerca classica. Le parole chiave della ricerca-azione sono: complessità (attenzione a tutti gli aspetti di un fenomeno e a tutte le dimensioni dell'essere umano), ascolto sensibile (basato sull'empatia), ricercatore collettivo (il soggetto della ricerca è costituito dal ricercatore e da tutti gli attori implicati), “cambiamento” (scopo della ricerca non è la conoscenza, ma l'introduzione di cambiamenti migliorativi in una pratica), negoziazione del conflitto, processo, autorizzazione (intesa come diventare autore di se stesso per appropriarsi della propria esistenza). Per

quanto riguarda la metodologia, per Barbier, la ricerca-azione si sviluppa in un processo a spirale (riflessione permanente) che tocca quattro tematiche centrali: l'individuazione del problema e la contrattazione; la pianificazione e la realizzazione; l'utilizzo di tecniche congruenti; la teorizzazione, la valutazione e la pubblicazione dei risultati.

Scurati (1993) intende la ricerca-azione come agente di cambiamento e esplicita che la conoscenza è orientata all'emancipazione sia dei ricercatori che degli attori. In particolare, l'autore chiarisce che la ricerca-azione implica, come caratteristica fondamentale, una "circolarità" fra ricerca e azione, per cui la ricerca si genera attraverso l'azione e l'azione di cambiamento attraverso la ricerca.

2.3. La ricerca-azione in campo educativo

Sul piano metodologico la ricerca-azione entra nel mondo della scuola grazie ai contributi di studiosi come Kemmis e Easen nel 1985 che la inquadrano come lo studio sistematico dei tentativi intrapresi tra gruppi di partecipanti per migliorare la prassi educativa sia attraverso le loro azioni pratiche sia attraverso la loro riflessione sugli effetti di questa azione.

È stato Elliott negli anni Sessanta, a dare impulso all'utilizzo della ricerca-azione in ambito scolastico. Per l'autore la ricerca-azione è uno strumento adatto per affrontare quelli aspetti dell'azione formativa e della didattica che sono percepiti come problematici dagli insegnanti, al fine di trovare modalità percorribili di soluzione. Determinante è la possibilità di dar vita ad un gruppo di ricerca che riunisca attori e ricercatori, in condizioni di pari dignità.

A tal proposito, lo studioso tedesco Klafki parla di "ricerca-azione di tipo educativo" individuando tre caratteristiche peculiari: risolve problemi di insegnamento/apprendimento, interviene direttamente sulla pratica didattica, sottolinea l'importanza della collaborazione tra ricercatori, esperti, dirigenti scolastici, docenti, genitori e studenti. (in Nigris, 2000).

Inoltre a partire dagli anni Novanta si inizia a considerare la ricerca-azione come uno strumento in grado di rimuovere la separazione, spesso presente nelle situazioni scolastiche, tra la ricerca e la prassi educativa. Tale separazione, come afferma Baldacci, ha da sempre generato due limiti: «in primo luogo, proprio per le sue caratteristiche “eccezionali” la ricerca rischia di diventare una pratica “rara”, in quanto stenta a trovare le condizioni adeguate di svolgimento; in secondo luogo, proprio per la sua separazione dalla ricerca, la prassi educativa rischia di perdere di scientificità e di razionalità, degradandosi a mero empirismo o, nel migliore dei casi, ad acritica applicazione dei “ritrovati” delle rare ricerche» (2001:139). Di fronte a questi pericoli, gli stessi insegnanti hanno avvertito l'esigenza di dare con la ricerca maggiore scientificità alla prassi educativa e, contemporaneamente, di far diventare l'esercizio educativo un valido momento di verifica della ricerca stessa. Cosicché, «la ricerca-azione è sembrata il dispositivo metodologico in grado di saldare la ricerca alla prassi educativa così come essa si realizza, in condizioni “naturali”, nell'istituzione scolastica» (2001:153).

A tal proposito, Curatola afferma che la ricerca-azione ha consentito alla scuola «da una parte, di precisare, in modo efficace e controllabile, la dimensione e il fondamento etico di un'educazione che ha come indicatore privilegiato di riferimento la persona (quella reale e problematica da cui trae origine il costituirsi dello stesso sociale) e, dall'altra, di indicare e di tracciare i criteri di fondo e le procedure metodologiche, indispensabili alla ricerca didattica, per la formalizzazione, la messa in atto e la sperimentazione di possibili percorsi formativi, i cui esiti risultino sempre coerentemente connessi con un sano progetto di vita a fondamento valoriale» (2003:20).

Cosicché la ricerca-azione si presenta come una metodologia innovativa in grado di modificare non solo la funzione del docente e del discente, ma anche l'intero assetto scolastico. Essa, infatti, rompe con i «sistemi cristallizzati e aprioristici di condotta educativa [...], poiché il suo esprimersi non è improvvisazione casuale, non è l'esito di una eclatante ricerca della novità, non

è sognante desiderio, è piuttosto il tentativo di dare senso e significato a soluzioni “su misura” evitando inutili dispersioni di risorse [...]» (2003:28).

2.4. La ricerca-azione e il miglioramento della qualità

Nel campo educativo, la ricerca-azione costituisce un elemento cardine della pedagogia istituzionale, sia per quanto riguarda la formazione del personale, sia per quanto riguarda l'analisi della pratica educativa e il suo miglioramento.

Per la pedagogia istituzionale, la ricerca-azione può dare un contributo decisivo allo sviluppo della “qualità” dei servizi educativi nella misura in cui diviene, come sostiene Zanelli (2002), “occasione” per attivare reali processi di crescita professionale, nel senso di una maggiore capacità progettuale, delle équipes educative e dei singoli educatori. La crescita delle capacità progettuali è collegata ad un processo di apprendimento (sociale), da parte dei singoli e delle équipes, di modalità di autovalutazione della propria pratica che consentano di incrementare le capacità di:

- leggere e analizzare l'attività educativa posta in essere, individuandone sia i punti di eccellenza, sia gli elementi di criticità;
- individuare e introdurre, in relazione all'analisi dell'esistente ed alle criticità rilevate, cambiamenti migliorativi, nell'organizzazione della didattica e, in particolare, del contesto educativo.

La ricerca-azione, come viene intesa dalla pedagogia istituzionale, prevede non solo di contribuire alla soluzione di determinati problemi o criticità rilevati nella pratica lavorativa, ma di favorire, in maniera intenzionale, l'acquisizione, da parte del gruppo di educatori (équipe educativa), di modalità rigorose e condivise di autovalutazione e di riorganizzazione della propria attività educativa e didattica. Utilizzando la terminologia di Bateson (1984) alcuni esponenti della pedagogia istituzionale interpretano la ricerca-azione come processo di “deuteroapprendimento”. Parlare di “deuteroapprendimento” vuol dire concepire la ricerca-azione come processo finalizzato non solo ad

apportare cambiamenti puntuali nella pratica educativa, ma come processo di apprendimento di strategie di valutazione e di riorganizzazione della pratica stessa.

Elliott (1993) sostiene che questa metodologia migliora la qualità dell'educazione perché sviluppa nei docenti sia la capacità di analisi sia quella di giudizio; nella ricerca essi diventano attori e costruttori della scienza. Secondo lui, la ricerca-azione è rivolta a quegli aspetti dell'azione formativa che gli insegnanti vedono come problematici, che richiedono risposte pratiche, efficaci ed idonee; essa consente inoltre di individuare le risposte adeguate ed efficaci alle problematiche da risolvere e implica un'intensa circolazione di informazioni e di idee tra i partecipanti all'attività di ricerca intervento sui vari problemi che devono essere affrontati o per la realizzazione dei progetti.

Lo scopo della ricerca-azione, infatti, è di elaborare conoscenza contestualizzata e orientata a migliorare una determinata pratica formativa. Tale miglioramento, però, richiede il cambiamento della realtà sotto esame, trasformazione che può essere ottenuta solo mediante l'azione congiunta di tutti gli attori che con la scuola operano.

La ricerca-azione diviene, perciò, un insostituibile metodo di sperimentazione di nuovi modelli educativi aventi lo scopo di attuare cambiamenti positivi nel contesto scolastico.

2.5. La ricerca-azione e la sperimentazione *Dal subitizing ai fatti aritmetici*

Il progetto sperimentale *Dal subitizing ai fatti aritmetici* può essere considerato un progetto di ricerca-azione, in quanto, segue l'iter di pianificazione, azione, osservazione, riflessione e prevede al termine di ogni fase un momento di valutazione che consente al team di ricerca di decidere in che modo proseguire verso la fase successiva.

Nello specifico il progetto condivide i parametri di ricerca specifici della ricerca-azione:

- la necessità di creare la collaborazione e il confronto tra i ricercatori e gli insegnanti, in un rapporto di parità, sia per quanto riguarda la definizione dei problemi da indagare che per ciò che concerne lo svolgimento della ricerca;
- il superamento da parte del ricercatore della pretesa di giungere alla neutralità nella ricerca;
- la necessità di porre attenzione alle dinamiche sociali e alle situazioni ambientali del contesto educativo, viste come variabili per lo svolgimento della ricerca.

Il progetto di ricerca *Dal subitizing ai fatti aritmetici* intende analizzare una pratica relativa al campo di esperienza della didattica della matematica. L'attore sociale, il team di ricerca composto dalle insegnanti appartenenti a varie istituzioni scolastiche della Valle d'Aosta e da ricercatori dell'università della Valle d'Aosta, ha come scopo quello di introdurre, nella prassi educativa, dei cambiamenti migliorativi.

La metodologia si basa sull'alternanza tra azione e riflessione. In particolare le tappe della sperimentazione prevedono:

- la formulazione delle ipotesi;
- l'individuazione degli obiettivi formativi da raggiungere;
- la progettazione del materiale da utilizzare durante l'attività in classe;
- il confronto su eventuali dubbi sulle attività svolte in classe;
- la condivisione di materiali;
- l'analisi dei risultati ottenuti;
- la negoziazione delle nuove attività da svolgere;
- l'eventuale riorganizzazione dei materiali.

La metodologia utilizzata ricalca il processo a spirale descritto da Barbier (2007) e mira all'emancipazione di tutti i soggetti coinvolti (Scurati, 1993). In questo modo si mantiene il legame tra insegnanti e ricercatori e si crea un sistema dinamico con l'obiettivo di eliminare la frattura di tempo che si crea tra la raccolta dei risultati e la loro messa in pratica. Inoltre, si attua la coerenza, obiettivo cardine della ricerca-azione, che nasce dal senso, dal significato che determinati fatti assumono per gli individui implicati in quanto soggetti e non oggetti della ricerca (Barbier, 2007).

Se si prendono in esame i punti chiave della ricerca-azione, secondo Pourtois (1984), il progetto *Dal subitizing ai fatti aritmetici* è stato ideato basandosi sui concetti di cambiamento e di effervescenza e può essere definito come ricerca-azione di tipo educativo (Nigris, 2000) in quanto interviene direttamente sulla pratica didattica.

Il progetto, infine, condivide con la ricerca-azione la necessità di rimuovere la separazione tra ricerca e prassi educativa, favorendo il confronto tra ricercatori e insegnanti e ponendosi come occasione per attivare reali processi di crescita professionale, favorendo la possibilità agli insegnanti coinvolti di sviluppare una maggiore capacità progettuale (Zanelli, 2002) che tiene conto degli aspetti teorici che la supportano.

Capitolo III - LA SPERIMENTAZIONE

Nel presente capitolo vengono illustrati gli elementi attraverso i quali il progetto si struttura; nel dettaglio vengono presentati: la struttura generale del progetto *Dal subitizing ai fatti aritmetici*, l'ipotesi di ricerca, dalla quale il progetto prende vita, gli obiettivi di ricerca e la metodologia che ha definito la parte sperimentale del progetto .

3.1 Struttura generale del progetto “Dal subitizing ai fatti aritmetici”

Il progetto di sperimentazione *Dal subitizing ai fatti aritmetici*, come già anticipato nell'introduzione, nasce all'interno del progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* e intende occuparsi, in particolare, di sperimentare attività e materiali che hanno l'obiettivo di potenziare le capacità di *subitizing* nei bambini della prima classe della scuola primaria; il risultato atteso alla fine del percorso sperimentale è che i bambini abbiano acquisito una maggiore familiarità con i fatti aritmetici migliorando quindi le prestazioni di calcolo mentale.

La ricerca coinvolge attivamente le insegnanti delle classi appartenenti al gruppo sperimentale che aderiscono al progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace*; di seguito vengono riportati gli elementi comuni tra il progetto regionale e la ricerca oggetto di questa tesi

Obiettivi:

- definire elementi di base per delineare strategie didattiche efficaci, in accordo con la ricerca sulle difficoltà specifiche di apprendimento in matematica e con la ricerca in didattica della matematica. Tale obiettivo persegue la finalità di creare un ponte fra ricerca e didattica di classe;
- sviluppare e testare strategie didattiche efficaci attraverso la collaborazione del gruppo di insegnanti afferenti al presente progetto. Tale obiettivo persegue la finalità di creare una sorta di

prevenzione agendo sulla didattica di potenziamento, per diminuire il numero delle diagnosi (falsi positivi) intervenendo efficacemente sugli alunni in difficoltà;¹⁵

- programmare e sperimentare l'uso di diversi strumenti (o artefatti,¹⁶ facendo riferimento alla teoria della Mediazione semiotica di Bartolini-Bussi e Mariotti, 2008), come supporto alla “didattica efficace”. Tale obiettivo persegue la finalità di sviluppare una didattica attenta ai diversi stili cognitivi presenti nella realtà classe.

Azioni previste:

- progettazione di percorsi didattici adeguati ed efficaci (“didattica efficace”)¹⁷ per l'integrazione scolastica di alunni con DSA e con difficoltà nel contesto classe di scuola dell'infanzia e scuola primaria . Tali percorsi vengono progettati dal gruppo di ricerca e sono frutto, quindi, della stretta collaborazione tra insegnanti e ricercatori dell'Università della Valle d'Aosta afferenti al gruppo di ricerca stesso;
- sperimentazione e messa in atto, nelle classi di appartenenza degli insegnanti coinvolti, dei percorsi didattici progettati;
- raccolta e analisi quantitativa dei dati relativi alla messa in atto dei percorsi didattici messi a punto dal gruppo di ricerca e sperimentati nelle classi di appartenenza;
- definizione di una prova da sottoporre agli alunni al termine dell'attività didattica per evidenziare le potenzialità e le eventuali carenze della didattica attuata;

Risultati attesi:

¹⁵ In linea con l'Accordo Stato-Regioni del 24 gennaio 2013 denominato: “Linee guida per la predisposizione dei protocolli regionali per le attività di individuazione precoce dei casi sospetti di DSA in ambito scolastico” (DM del 17 aprile 2013).

¹⁶ L'idea di artefatto è molto generale e comprende diversi tipi di “oggetti”, prodotti dagli esseri umani nel corso dei secoli: suoni, gesti; utensili e strumenti; forme orali e scritte del linguaggio naturale; testi e libri; strumenti musicali; strumenti scientifici; strumenti informatici, ed altri. (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008).

¹⁷ Vedere introduzione.

- definizione di attività didattiche efficaci per il potenziamento del calcolo mentale, che permettano l'inclusione scolastica di alunni con DSA e con difficoltà in matematica nel contesto classe di scuola primaria e scuola dell'infanzia
- diffusione di una cultura didattica innovativa, basata sul raccordo sinergico di teoria e prassi, e su metodologie sperimentali.

Il progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* prevede incontri periodici in cui le insegnanti concordano e programmano le attività da svolgere e mettono a punto il materiale da utilizzare durante le attività in classe. Per lo scambio del materiale di studio e per la condivisione delle opinioni e del materiale prodotto di volta in volta dal team di ricerca, le insegnanti utilizzano *Google Drive*.¹⁸ Gli incontri mensili previsti dal progetto sono, inoltre, l'occasione di confronto sulle metodologie didattiche utilizzate dalle varie insegnanti nelle classi e sull'efficacia del lavoro proposto agli alunni. Tali momenti permettono, alle insegnanti, di rivedere eventuali criticità del materiale e/o delle metodologie applicate nel lavoro in classe.

Il progetto *Dal subitizing ai fatti aritmetici* si inserisce nel progetto *Questione di numeri* e contribuisce alla definizione delle attività che costituiscono la sperimentazione inerente l'approccio al numero e al calcolo mentale. Si occupa quindi di sviluppare la sperimentazione di una parte del progetto, di preparare i test necessari per la valutazione dell'efficacia del lavoro svolto nelle classi e supporta l'analisi delle attività didattiche oggetto del paragrafo 4.2. Si occupa inoltre di raccogliere i dati e di sviluppare una prima analisi quantitativa di questi.

¹⁸ Luogo unificato per archiviare, accedere e condividere tutti i file. Gli utenti dell'organizzazione possono gestire qualsiasi tipo di file da qualsiasi postazione utilizzando qualunque dispositivo con installato il client di Drive. <https://support.google.com/a/answer/2490026?hl=it>

3.2 Ipotesi e obiettivi della sperimentazione

Il progetto di ricerca *Dal subitizing ai fatti aritmetici* prende origine dall'ipotesi secondo la quale attività didattiche che prevedono l'uso di specifici strumenti capaci di potenziare il fenomeno del *subitizing*, possono favorire l'acquisizione di fatti aritmetici, consolidando lo sviluppo di strategie efficaci per il calcolo mentale. In particolare, sulla base di quest'ipotesi, e degli elementi teorici del presente lavoro di ricerca, le attività e i materiali sviluppati si basano e utilizzano prevalentemente il canale visivo non verbale.¹⁹

Gli obiettivi che il progetto di ricerca intende perseguire sono relativi, in prima istanza, alla progettazione di attività didattiche specifiche che implementino la capacità di *subitizing*. In secondo luogo, il progetto ha il fine di ideare e realizzare artefatti utilizzabili dagli alunni durante le attività sopra descritte. Questi materiali (attività didattiche e strumenti) sono liberamente consultabili dagli insegnanti su Google Drive dedicato al progetto *Questione di numeri*.²⁰

Le attività didattiche e i relativi artefatti saranno poi sperimentati dagli insegnanti coinvolti nel progetto all'interno delle classi. Verranno, dunque, creato un gruppo sperimentale e un gruppo di controllo per verificare l'ipotesi di partenza, ovvero se l'implementazione delle capacità di *subitizing* attraverso attività didattiche realizzate appositamente, possa favorire l'acquisizione dei fatti aritmetici e successivamente del calcolo mentale. Per tale valutazione verrà utilizzato uno strumento creato appositamente che chiamiamo test di valutazione.

3.3 Metodologica

Il progetto sperimentale, partendo da una precisa cornice teorica di riferimento, vede nelle conoscenze pregresse possedute da ogni alunno un elemento imprescindibile da considerare centrale nella fase di programmazione didattica e punta alla costruzione di nuove conoscenze e competenze attraverso le

¹⁹ Come illustrato dettagliatamente nel § 1.4.1.

²⁰ <https://drive.google.com/a/mail.scuole.vda.it/?dnrt=1#my-drive>.

predisposizione di attività mirate con artefatti specifici al fine di rafforzare gli apprendimenti e di sedimentarli.

Le attività proposte nelle classi prevedono lavori in piccoli gruppi (4-5 bambini), lavori individuali e momenti di confronto con l'intero gruppo classe. Le attività in piccoli gruppi, eterogenei per competenze, hanno l'obiettivo di favorire la costruzione sociale delle conoscenze oltre a supportare attività di *modelling*.²¹ I gruppi sono formati dall'insegnante che di volta in volta varia la loro composizione di modo che i bambini siano sempre stimolati dal confronto con diversi compagni e differenti livelli di abilità. La scelta di creare gruppi di 4 o 5 alunni mira a consentire alti livelli di interazione e coinvolgimento: gruppi troppo numerosi rischierebbero l'esclusione di alcuni alunni dall'attività. L'eterogeneità dei gruppi consente in particolar modo lo sviluppo di competenze sociali e cognitive degli alunni in difficoltà basandosi sul concetto di *Zona di sviluppo prossimale*.²²

Le attività individuali sono invece momento di riflessione e permettono all'insegnante di verificare la comprensione e l'interiorizzazione dei contenuti matematici del lavoro svolto.

I momenti di *mise en commun* hanno l'obiettivo di favorire la verbalizzazione e la discussione matematica nella quale, secondo Bartolini Bussi (1966), l'insegnante ha il compito di agevolare il confronto delle varie procedure o strategie che emergono durante la soluzione del compito senza fornire risposte "pronte" ma riprendendo gli elementi importanti per la progressione della discussione, o riformulando i concetti espressi in modo poco chiaro per

21 Il termine *modelling* è usato da Bandura (1964) per identificare un processo di apprendimento che si attiva quando il comportamento di un individuo che osserva si modifica in funzione del comportamento di un altro individuo che ha la funzione di modello. Nel caso specifico delle attività in piccoli gruppi proposte, un bambino osserva un altro bambino più esperto che funge da modello.

22 Vygotskij definisce la Zona di sviluppo prossimale (ZSP) come la distanza tra il livello di sviluppo attuale e il livello di sviluppo potenziale che può essere raggiunto con l'aiuto di altre persone, che siano adulti o pari, con un livello di competenze maggiore (1965).

giungere ad un sapere matematico condiviso. In particolare la discussione matematica, che non è oggetto della presente ricerca e per questo motivo non verrà approfondita, può essere considerata, riprendendo le teorie di Bartolini Bussi (1996), come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico a cui deve mirare l'attività di insegnamento-apprendimento della matematica. Questo tipo di discussione permette agli alunni di esporre le proprie soluzioni, confrontarle con quelle degli altri compagni, trovare differenze e/o somiglianze al fine di procedere nella costruzione e nell'acquisizione collettiva delle conoscenze.

3.3.1 Classi coinvolte

Lo studio sperimentale ha coinvolto 6 classi di diverse istituzioni scolastiche valdostane per un totale di 119 alunni di classe prima della scuola primaria (6/7 anni) e 5 insegnanti di matematica della scuola primaria.

Le classi interessate sono state suddivise in due gruppi, uno sperimentale composto dalle classi nelle quali è stato svolto il lavoro di potenziamento rispetto al *subitizing*, ed uno di controllo, composto dalle classi, che non hanno seguito il percorso sperimentale, nelle quali è stato svolto il programma scolastico in modo ordinario, senza alcuna attività specifica. La numerosità dei due gruppi era all'incirca identica, questo al fine di permettere una comparazione dei dati più efficace e statisticamente attendibile.

Di seguito vengono dettagliate la composizione del campione: gruppo sperimentale (57 bambini) e di quello non sperimentale (62 bambini).

Il gruppo sperimentale era composto da un totale di 57 alunni così suddivisi (Tabella 1a):

- classe prima della scuola primaria di Fénis - Istituzione scolastica "Monte Emilius I";
- classe prima della scuola primaria di Saint-Vincent - Istituzione scolastica "Abbé Trèves";

- classe prima della scuola primaria di Plan Félinaz - Istituzione scolastica “Monte Emilius 3”.

I restanti 62 bambini facevano parte del gruppo di controllo che era così suddiviso (Tabella 1b):

- classe prima della scuola primaria paritaria di Aosta - San Giuseppe Aosta;
- 2 classi prime della scuola primaria di Chatillon - Istituzione scolastica “Abbé Prosper Duc”.

Classi sperimentali	Alunni
Fénis	17
Plan Félinaz	10
Saint- Vincent	30
Totale	57

Classi di controllo	Alunni
Aosta	22
Chatillon sez. A	20
Chatillon sez. B	20
Totale	62

Tabella 1a e 1 b - Dettaglio numerosità classi sperimentali e di controllo

3.3.2 Metodologia sperimentale

L'impostazione metodologica che caratterizza questa sperimentazione si situa all'interno dell'approccio della ricerca-azione, in quanto prevede una ricorsività costante e continua tra azione e riflessione e il coinvolgimento attivo degli attori, insegnanti e ricercatori, che sono implicati direttamente in ogni fase della ricerca. In particolare le tappe della sperimentazione, che come detto ricalcano il modello a spirale di Barbier descritto nel paragrafo 2.2, prevedono:

- la formulazione delle ipotesi;
- l'individuazione degli obiettivi formativi da raggiungere;

- la progettazione del materiale da utilizzare durante l'attività in classe;
- il confronto fra insegnanti sulle attività svolte in classe;
- la condivisione di materiali;
- l'analisi dei dati ottenuti;
- la negoziazione tra le insegnanti delle nuove attività da svolgere;
- l'eventuale riorganizzazione dei materiali necessaria in seguito all'analisi svolta.

Fra le attività didattiche si prevedono attività ludiformi che incentivano una motivazione di tipo intrinseco, coinvolgendo non solo la sfera cognitiva ma anche quella affettiva e relazionale (White, 1959). Tale approccio metodologico è in linea con le Indicazioni Ministeriali del 2012, che nella parte che riguarda la matematica, riportano nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi.

Bruner considera il gioco con riferimento all'adattamento umano e alle strategie di soluzione di problemi. Giocare è, innanzi tutto, un modo di apprendere all'interno di una situazione "controllata", in cui sono ridotti al minimo i rischi di una violazione delle regole sociali. Il gioco assume così un ruolo importante nell'evoluzione dell'educabilità. Funzione prioritaria del gioco sarebbe, quindi, conseguire, attraverso la manipolazione di strumenti, una migliore destrezza e sempre nuove combinazioni di comportamenti. Il gioco è definibile, grazie alle teorie sviluppate dai numerosi studiosi che si sono interessati dell'argomento, come uno straordinario fattore di maturazione. Vygotskij sostiene che «il gioco contiene tutte le tendenze evolutive in forma condensata ed è esso stesso una fonte principale di sviluppo» (1996:150). Il gioco risulta essere un'esperienza coinvolgente e ricca di stimoli, capace di catturare l'attenzione, attivare e motivare anche i bambini con maggiori difficoltà, accompagnandoli nell'acquisizione di conoscenze, strategie e competenze. A seguito di tali considerazioni sono state previste dalla sperimentazione attività ludiformi che hanno come obiettivo principale quello

di favorire il coinvolgimento e l'integrazione di tutti gli alunni della classe con difficoltà e non, nell'ottica di una "didattica efficace". Tale tipo di didattica prevede obiettivi formativi adatti alle caratteristiche dei soggetti in formazione e ai loro ritmi di apprendimento. Inoltre favorisce la misura di sé e del proprio agire attraverso la metacognizione.²³

Le attività prevedono l'utilizzo di artefatti, ideati e realizzati dalle insegnanti del team di ricerca, con lo scopo di facilitare il più possibile lo svolgimento del compito assegnato. Tali artefatti danno la possibilità ai bambini di andare oltre il livello pratico utilizzandoli come strumento di acquisizione di nuove conoscenze grazie alla mediazione semiotica dell'insegnante che «agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti... Un artefatto sarà chiamato quindi strumento di mediazione semiotica quando viene intenzionalmente impiegato dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato» (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008:35).

L'uso di attività ludiformi e di artefatti concepiti allo scopo sono strumenti adatti, dal punto di vista della ricerca-azione, a un coinvolgimento attivo degli alunni, atto a risolvere i problemi di insegnamento/apprendimento intervenendo direttamente nella pratica didattica e sottolineando la necessità di collaborazione di tutti gli attori (Nigris, 2000) considerati in quanto soggetti e non oggetti della ricerca (Barbier, 2007).

3.4 Le fasi e i tempi della sperimentazione

La sperimentazione è strutturata in quattro fasi: *progettazione, sperimentazione, costruzione dello strumento di valutazione e analisi dei dati.*

23 «L'approccio meta cognitivo tende a formare le capacità di essere, il più possibile, gestori diretti dei propri processi cognitivi, dirigendoli attivamente con proprie valutazioni e indicazioni operative. Nella didattica meta cognitiva l'attenzione dell'insegnante non è tanto rivolta [...] quanto al formare quelle abilità mentali superiori di autoregolazione che vanno al di là dei semplici processi cognitivi primari [...] L'approccio didattico meta cognitivo è senz'altro uno sviluppo recente molto interessante e utile tra quelli originati nell'ambito della psicologia cognitiva dell'educazione e viene applicato attualmente con risultati positivi sia a livello della metodologia didattica rivolta alla generalità degli alunni, sia negli interventi di recupero e sostegno di quelli con difficoltà di apprendimento» (Ianes, 2006,83).

Tali fasi si sviluppano da settembre 2013 a gennaio 2015:

- la prima fase, quella della *progettazione*, si svolge durante la prima parte dell'anno scolastico 2013/2014 a partire dal mese di novembre, dopo un primo periodo dedicato esclusivamente alla formazione insegnanti del progetto *Questioni di numeri*;
- la seconda fase, quella della *sperimentazione*, successiva temporalmente e logicamente alla fase della *progettazione*, si svolge nel periodo da dicembre 2013 a giugno 2014. Le attività e i materiali progettati sono stati fin da subito sperimentati dalle insegnanti all'interno delle loro classi, verificando così immediatamente elementi di efficacia/non efficacia, funzionalità e coinvolgimento;
- la terza fase, quella della *costruzione dello strumento di valutazione*, interessa il periodo che va da maggio 2014 a gennaio 2015.
- l'ultima fase, quella dell'*analisi dei dati raccolti*, interessa il periodo da dicembre 2014 a febbraio 2015.

3.4.1 Fase 1 – Progettazione delle attività didattiche

Durata: novembre 2013 a febbraio 2014

In questa fase sono state discusse, concordate e programmate le attività iniziali da proporre alle classi ed è stato progettato ed elaborato parte del materiale che le insegnanti avrebbero utilizzato per le attività nelle classi.

Analizzando questa fase in base ai principi della ricerca-azione, viene considerato come campo di esperienza per le insegnanti coinvolte, la progettazione di attività didattiche legate al lavoro di potenziamento del *subitizing* memorizzazione e recupero dei fatti aritmetici e potenziamento di strategie efficaci per il calcolo mentale. Gli attori sociali coinvolti, infatti, sono le insegnanti del team di ricerca, me compresa, in qualità di ideatore della ricerca, che hanno come principale obiettivo quello di introdurre nella pratica

didattica dei cambiamenti migliorativi rispetto alle attività di percezione ed elaborazione del numero, della conta e del calcolo mentale.

Negli incontri periodici del team di insegnanti avveniva la progettazione delle attività didattiche. Tale progettazione ricalcava il processo a spirale descritto da Barbier (2007) ed era articolato secondo le seguenti tappe:

- formulazione delle prime ipotesi sul tipo di attività da svolgere nelle classi e degli obiettivi da raggiungere;
- progettazione delle attività didattiche;
- prima sperimentazione nelle classi;
- discussione dei dati raccolti (prima forma di analisi a posteriori);
- analisi dei risultati ottenuti rispetto agli obiettivi prefissati;
- modifica delle attività sulla base dei risultati dell'analisi;
- nuova sperimentazione delle attività nelle classi;
- raccolta dati e loro analisi.

Il processo terminava quando i risultati apparivano sufficientemente vicini a quelli attesi da una didattica efficace rispetto agli obiettivi didattici prefissati.

Questa ricorsività di azione e riflessione ha permesso di eliminare la frattura di tempo che si crea, solitamente, in altre tipologie di sperimentazione didattica, tra la raccolta dei dati e l'analisi dei risultati. La coerenza delle attività progettate nasce dal senso, dal significato che le attività didattiche assumono per le insegnanti e per gli alunni delle classi coinvolte. L'obiettivo è di risolvere eventuali problemi che sorgono durante la prassi didattica mettendo mano, in itinere, alle attività da svolgere.

La progettazione delle attività didattiche, secondo l'ottica della ricerca-azione è caratterizzata da:

- un approccio olistico che mira ad evitare una parcellizzazione delle problematiche riguardanti la didattica della matematica del primo anno della scuola primaria;
- la significatività delle attività didattiche per gli attori coinvolti, i quali hanno avuto un ruolo attivo in ogni fase della ricerca;

- ampio spazio ha avuto, all'interno del team di ricerca, la negoziazione fra insegnanti delle azioni da compiere;
- l'intervento diretto dell'ideatore della ricerca nelle fasi di progettazione, ha permesso di ottenere una percezione globale del divenire dell'azione;
- la riformulazione del modello iniziale delle attività che è stato spesso modificato proprio perché la metodologia della ricerca-azione prevede una costruzione in itinere delle azioni e incide sulla definizione dei problemi e sulla scelta dei metodi di ricerca;
- il perseguimento dello sviluppo personale e professionale degli insegnanti coinvolti che hanno cercato di migliorare la loro professionalità acquisendo una metodologia di lavoro nuova che li ha coinvolti attivamente.
- la produzione di un mutamento nella prassi didattica delle insegnanti coinvolte.

3.4.1.1 Artefatti ideati dal gruppo di ricerca

Di seguito, verranno illustrati gli artefatti introdotti nelle classi, ideati appositamente dalle insegnanti del team di ricerca. Ogni artefatto introdotto nella prassi didattica richiede un tempo di familiarizzazione che deve essere attentamente valutato dalle insegnanti, visto che, tali artefatti possono determinare, inizialmente, un appesantimento per i processi di apprendimento, soprattutto per i bambini in difficoltà (Bartolini Bussi, 2011). Per questo motivo il gruppo di ricerca ha ideato una rete minima di artefatti orientati alla “didattica efficace” che sono stati utilizzati nelle diverse attività in base agli obiettivi didattici delle attività stesse. Tali artefatti diventeranno strumenti mentali nel momento in cui i bambini avranno avuto modo di interiorizzare la pratica sociale relativa al loro uso (Bartolini Bussi, 2011).

1. Carte con dots con disposizione convenzionale (i dots sono disposti come abitualmente si possono vedere sulle facce del dado o come

normalmente si trovano disposti i simboli nelle carte da gioco) e non convenzionale (da 0, a 9) (Figura 1). Il team di insegnanti ha scelto di usare questa tipologia di rappresentazione analogica sia perché i dots sono presenti in giochi da tavola che i bambini già conoscono (tessere del domino, facce del dado) sia perché la loro quantità può essere percettivamente evidente quando sono in numero inferiore a 4, in accordo con i risultati delle teorie delle neuroscienze. L'idea, basata sul fenomeno del *subitizing*, è di esporre i bambini a configurazioni differenti di dots (diverse disposizioni) al fine di potenziare il loro ricordo visivo delle quantità. A questo scopo, si sono considerate dapprima carte con un numero di dots inferiore a 4 e, successivamente, superiore a 4 dots. Le carte, che dapprima vengono fornite con dots "pieni" (colorati in nero) sono poi fornite ai bambini con dots incolore. Essi potranno essere colorati dai bambini secondo il tipo di attività da svolgere (ne è un esempio l'attività di seguito descritta gli *I numeri amici*).²⁴

La variazione del colore, prevista e negoziata dagli insegnanti del gruppo, ha lo scopo di rendere percettivamente evidenti le scomposizioni dei numeri (fino a 4 o superiori a 4). Ciò si basa sul risultato della ricerca in psicologia cognitiva, secondo la quale, i soggetti con difficoltà accedono ed elaborano le informazioni con canali preferenziali che sono il visivo non verbale e il cinestetico tattile.

²⁴ L'attività verrà descritta dettagliatamente nel § 3.4.1.2

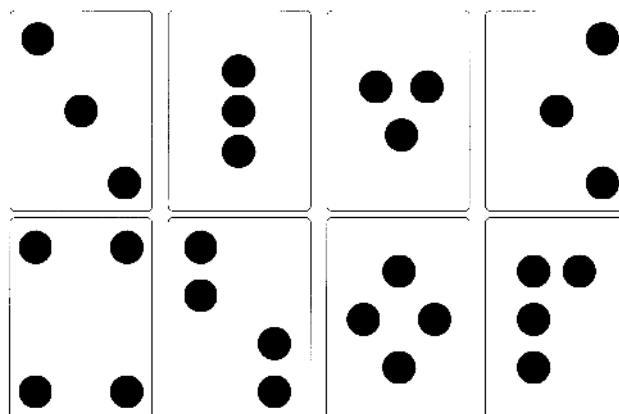


Figura 4: esempio di carte con dots con disposizione convenzionale e non

2. Carte con le dita (da 0, a 9) (Figura 2), questo tipo di rappresentazione analogica è stata adottata partendo dalla considerazione di Butterworth (1999), nello specifico quando afferma: *sembra ci sia una connessione molto diretta fra le dita, il conteggio e i numeri* per fare in modo di ancorare tali artefatti all'utilizzo quotidiano che in questa fascia di età (5-7anni) i bambini fanno delle dita quale supporto cinestetico tattile nelle attività di conta e di calcolo (Resnick, 1995). Inizialmente sono le dita stesse ad assumere il ruolo di artefatto culturale e il bambino le utilizza come strumento per rappresentare e manipolare la quantità. Butterworth (1999) afferma che la rappresentazione mentale della quantità segue non solo la suddivisione delle dita ma anche la stessa immagine mentale delle dita, egli utilizza il termine di “gnosia digitale” per definire la capacità di rappresentare mentalmente le dita. L'utilizzo delle carte che rappresentano le quantità attraverso la raffigurazione delle dita delle mani e rispettano la loro disposizione in cinque permette, quindi, di mettere in relazione le quantità concrete, le quantità analogiche e le quantità simboliche e fungono da ponte nel legare rappresentazioni concrete a rappresentazioni astratte delle nozioni di “quantità”. Questo tipo di carte, che rappresenta le quantità e le

sistematizza sempre allo stesso modo secondo una disposizione conosciuta (cinquina), permette una lettura veloce delle quantità. Anche questo tipo di carte viene utilizzato dopo essere stato colorato, utilizzando due colori diversi, per rappresentare i fatti aritmetici rendendoli, in questo modo, percettivamente evidenti (ad esempio nel gioco *Recto Verso*);²⁵

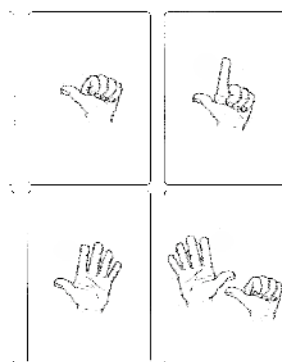


Figura 5: esempio di carte con le dita

3. Carte con le cifre in rappresentazione arabica (da 0, a 9) (Figura 3), questo tipo di rappresentazione, che utilizza il linguaggio simbolico, è quello che i bambini hanno imparato a conoscere già alla scuola dell'infanzia e che sono abituati a riconoscere ed utilizzare nelle attività quotidiane in diversi contesti. L'utilizzo delle cifre in rappresentazione arabica consente, quindi, di partire dalle conoscenze già acquisite dai bambini per procedere nell'apprendimento ancorando le nuove conoscenze alle precedenti. Per questo motivo le carte con le cifre in rappresentazione arabica vengono utilizzate in quasi tutte le attività proposte alle classi.

²⁵ L'attività verrà descritta dettagliatamente nel § 3.4.1.2

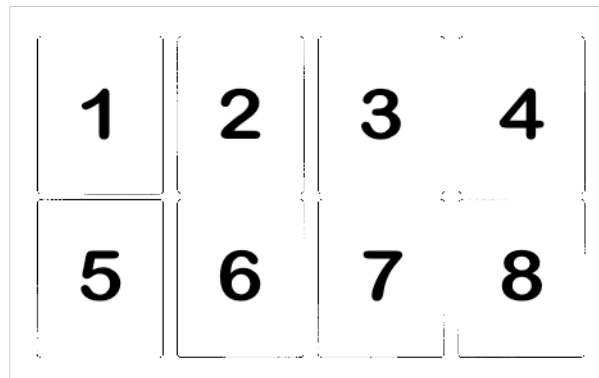


Figura 6: carte con le cifre

Il materiale prodotto utilizza tre tipologie di rappresentazioni diverse: le carte con le cifre, codice arabico, utilizzano il linguaggio simbolico mentre le carte con i dots e quelle con le dita, sono presentate in codice analogico e utilizzano il linguaggio iconico. L'utilizzo di diverse tipologie di rappresentazioni supporta l'acquisizione dei diversi significati del numero, inteso qui come quantità, attraverso differenti canali di accesso e di decodifica che mostrano le varie forme in cui la quantità può essere espressa, manipolata e trasformata.

Duval (2006) definisce questi diversi tipi di rappresentazioni "semiotiche" perché li considera come dei segni che hanno la caratteristica di designarne altri: il ruolo di tali segni, infatti, non è solo di comunicare gli oggetti cui si riferiscono ma soprattutto quello di manipolarli, di trasformarli, di lavorare con essi. Secondo lo stesso Duval l'acquisizione di un concetto si ha nel momento in cui l'alunno è in grado di passare da un sistema rappresentativo a un altro.

Il fatto di proporre tre diversi tipi di rappresentazione delle quantità ha, quindi, l'obiettivo di rinforzare la corrispondenza tra un semante quantitativo e le sue varie rappresentazioni, come auspicato da Duval che afferma l'importanza di progettare attività in cui l'allievo trasforma una rappresentazione semiotica in un'altra. Queste attività permettono di rendere esplicito il fatto che più rappresentazioni si rivolgono allo stesso oggetto, quindi permettono agli alunni

di dissociare l'oggetto dalle sue rappresentazioni semiotiche per progredire nell'apprendimento (Duval, 2006).

Di seguito verranno riportate nel dettaglio le attività didattiche oggetto della sperimentazione. Per ciascuna si definiranno: gli obiettivi elaborati in fase di progettazione; il materiale utilizzato e la descrizione delle attività. La spiegazione sarà arricchita da immagini del materiale.

3.4.1.2 Attività progettate

Il primo gruppo di attività prevede attività ludiformi che permettono una iniziale familiarizzazione con il materiale proposto agli alunni e, sfruttando la naturale predisposizione dei bambini al gioco, li introduce al lavoro di potenziamento delle capacità di *subitizing*. Queste attività prevedono un graduale aumento della difficoltà dei giochi che partono da un livello iniziale, in cui si adoperano poche carte, quelle con quantità che vanno da 0 a 3; un livello intermedio in cui si introducono anche le carte con quantità 4 e 5; un livello più alto che prevede l'introduzione graduale delle carte con quantità fino al 10. È necessario durante le fasi iniziali di tali attività che le insegnanti si interrogino sul diverso grado di leggibilità delle carte per gli alunni, in questo senso è necessario prevedere che per alcuni bambini possano risultare maggiormente chiare alcune rappresentazioni dei dots sulle carte e per altri alunni altre.

Gli obiettivi delle attività proposte ai bambini, che di seguito verranno spiegate nel dettaglio, erano molteplici. In primo luogo l'acquisizione di familiarità con le quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10); secondariamente l'acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10; inoltre il confronto tra le varie quantità, l'esecuzione mentale di semplici operazioni naturali e la verbalizzazione delle procedure di calcolo, ed infine il saper comporre e scomporre i numeri in insiemi più semplici e il saperli raggruppare.

Le attività proposte prevedono l'utilizzo di:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica (Allegato 1-2);
- carte con rappresentazione analogica delle dita (Allegato 2-3);
- carte con dots disposti in modo convenzionale (Allegato 4-5-6-7-8);
- carte con dots disposti in modo non convenzionale (Allegato 4-5-6-7-8).

Ogni bambino aveva a disposizione un mazzo formato da tutti i tipi di carte sopra elencati, inizialmente (primo periodo scolastico) i mazzi erano formati da carte con quantità più basse, da 0 a 4. Raggiunto un buon grado di familiarizzazione con tali quantità si passava gradualmente all'introduzione delle successive entro il 10.

Di seguito vengono presentate nel dettaglio tutte le attività progettate e sperimentate nelle classi.

SUBITIZING

Obiettivi specifici:

- acquisire familiarità con le quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 10.

Strumenti:

- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

Gli strumenti indicati utilizzano varie rappresentazioni delle quantità e il loro utilizzo in quest'attività permette di mostrare agli alunni le diverse tipologie di rappresentazioni e consolidare il passaggio da un tipo di rappresentazione ad un'altra e il legame di tali rappresentazioni con il codice verbale corrispondente.

Durata:

inizialmente il tempo da dedicare a tale attività è più sostanzioso perché i bambini devono abituarsi alle richieste dell'insegnante e familiarizzare con gli strumenti necessari. In seguito, l'attività può durare anche pochi minuti a inizio lezione, in questo caso lo scopo è di attivare l'attenzione e il coinvolgimento nelle attività successive oltre a consolidare il lavoro già acquisito.

Descrizione:

L'insegnante presenta le quantità, inizialmente solo da 0 a 5, in seguito si passa gradualmente all'introduzione delle altre carte fino ad arrivare al 10. Richiede agli alunni di riconoscere e nominare (usando solo il codice verbale) le quantità presentate. Il riconoscimento deve avvenire in modo via via sempre più rapido.

MEMORY

Obiettivi specifici:

- acquisire familiarità con le quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

Gli strumenti indicati utilizzano varie rappresentazioni delle quantità e il loro utilizzo in questa attività permette di mostrare agli alunni le diverse tipologie di rappresentazioni e consolidare il passaggio da un tipo di rappresentazione ad un'altra e il legame di tali rappresentazioni con il codice arabico corrispondente.

Durata:

circa 15 min.

Descrizione:

l'insegnante decide con quali mazzi di carte proporre l'attività (dots e dita, dots e cifre, cifre e dita), suddivide i bambini in coppie, dispone su un piano le carte coperte, e chiede ai bambini a turno di scoprire due carte cercando di individuare le coppie di carte che rappresentano la stessa quantità, si procede fino ad aver formato tutte le coppie di carte possibili.

DOMINO

Obiettivi specifici:

- rinforzare la corrispondenza tra due diverse rappresentazioni analogiche della stessa quantità (entro il 6);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 6;

Strumenti:

- tessere del domino (Allegato 9-10-11-12), divise in due aree in cui vi possono essere rappresentate le quantità attraverso i dots o le dita delle mani di modo da rinforzare la corrispondenza tra le due diverse rappresentazioni della stessa quantità senza l'utilizzo delle cifre in rappresentazione arabica.

Questo tipo di strumento è stato creato per il gioco del domino e sostituisce le normali tessere. Tali tessere sono divise in due aree sulle quali vi sono rappresentati o i dots, rappresentazione classica del gioco del domino, o immagini che mostrano le quantità attraverso l'uso delle rappresentazioni delle mani. In questo caso vengono utilizzate solo due tipologie di rappresentazioni (dots e dita) con lo scopo di consolidare il passaggio da un tipo di rappresentazione all'altra.

Durata:

circa 20 min

Descrizione:

l'insegnante spiega le regole del gioco, predispone gruppi di gioco con massimo 3 bambini, per permettere il coinvolgimento attivo di ogni alunno nell'attività, e distribuisce loro le tessere del domino. I bambini iniziano a giocare rovesciando, a testa in giù, tutte le tessere sul tavolo e ne distribuiscono 5 ad ogni giocatore. Le tessere rimanenti vanno lasciate sul tavolo. Inizia a giocare il bambino che ha la carta che rappresenta la quantità maggiore, mette una tessera sul tavolo, questa volta girata, e il turno passa al giocatore alla sua sinistra, che attacca una tessera a quella del compagno, solo se ha una tessera con almeno uno delle due quantità rappresentate. Altrimenti pesca da quelle rimaste sul tavolo fino a che ne trova una da attaccare, aggiungendo quelle non compatibili alle proprie.

In questo modo viene a formarsi un "serpente" di tessere.

RUBAMAZZETTO

Obiettivi specifici:

- riconoscere le quantità e le loro diverse rappresentazioni (entro il 10);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 10;
- saper confrontare le quantità entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

In questa attività possono essere, se necessario per rendere più semplice l'attività, inizialmente, utilizzate solo alcune tipologie di carte, ad esempio quelle che risultano ai bambini più facili da riconoscere. In seguito si passerà all'utilizzo di tutti i tipi di rappresentazioni in modo da permettere il confronto

tra le diverse tipologie di rappresentazioni delle quantità e di operare transcodifiche da un registro di rappresentazione all'altro.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

L'insegnante chiede ai bambini se, tra di loro, c'è qualcuno che conosce già le regole del rubamazzetto e se vi ha già giocato in precedenza. Inseguito, si cerca con l'aiuto degli eventuali alunni che già conoscono il gioco di definire quali sono le regole del rubamazzetto. Dopodiché ad ogni bambino viene distribuita la seguente scheda con le regole del gioco (Allegato 13) che verrà incollata sul quaderno, si leggono ad alta voce le regole, si suddividono i bambini in gruppi di 4 e si dà inizio al gioco (Scheda 1) (Video 1 nel CD allegato: mostra quattro bambini della classe prima di Fénis intenti a giocare a *Rubamazzetto*). La scelta di dare ai bambini le schede con le regole del gioco (Allegati 13, 14, 15 e 18) è stata fatta sia per lasciare una traccia del lavoro svolto, sia perché ai bambini viene chiesto di condividere i momenti di gioco con parenti e amici che hanno modo, leggendo le schede, di conoscere le regole dei giochi.

La necessità di proporre questo tipo di attività, nell'ambito della sperimentazione ha come obiettivo principale di far in modo che l'alunno non faccia lo sbaglio di considerare come concetti differenti diverse rappresentazioni dello stesso concetto. Secondo Duval (2006), abituare gli alunni al passaggio da un registro all'altro, rende possibile quella dissociazione cognitiva tra oggetto e rappresentazione necessaria per il progredire della conoscenza matematica.

GIOCHI DI CARTE : RUBAMAZZETTO



Si gioca in quattro persone con un mazzo da 40 carte.

Lo scopo è quello di cercare di prendere il maggior numero di carte.

Svolgimento del gioco:

Tra i giocatori viene scelto il "mazziere", cioè chi deve mescolare le carte e distribuirle. Dopo aver fatto tagliare il mazzo dal giocatore alla sua destra, il mazziere distribuisce le carte.

Si distribuiscono tre carte a testa, coperte ed una per volta, in senso orario. Poi se ne scoprono altre quattro, che si lasciano al centro del tavolo. Il resto del mazzo viene accantonato sul tavolo, coperto.

Il giocatore di turno cerca di catturare una delle carte presenti sul tavolo. Per prenderla deve possedere una carta dello stesso valore numerico.

In tal caso la prende e mette le due carte impilate davanti a sé, con il valore scoperto e visibile.

Se non possiede nessuna carta simile, deve scartare una carta al centro del tavolo.

Se ha una carta uguale a quella che sta sopra il mazzetto di uno dei suoi avversari, può prendergli, cioè "rubare", l'intero mazzetto.

Quando tutti i giocatori rimangono senza carte in mano, il mazziere distribuisce altre 3 carte per ciascuno, fino alla fine del mazzo.

Il gioco termina quando non vi sono più carte da distribuire.

Il vincitore del Rubamazzetto è il giocatore che possiede il maggior numero di carte all'interno del proprio mazzetto alla fine della partita.

Scheda 1 – Regole del gioco di carte Rubamazzetto

LE JEU DE BATAILLE

Obiettivi specifici:

- riconoscere le quantità e loro diverse rappresentazioni (entro il 10);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 10;
- saper confrontare le quantità entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

In quest'attività possono essere, se necessario per rendere più semplice l'attività, inizialmente, utilizzate solo alcune tipologie di carte, ad esempio quelle che risultano ai bambini più facili da riconoscere. In seguito si passerà


all'utilizzo di tutti i tipi di rappresentazioni in modo da permettere il confronto tra le diverse tipologie di rappresentazioni delle quantità e di operare transcodifiche da un registro di rappresentazione all'altro.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

a ogni bambino viene distribuita la scheda con le regole del gioco (Allegato 14), dopo averla incollata sul quaderno si procede alla lettura delle regole, che in questo caso, sono state scritte in francese,²⁶ (Scheda 2). Si suddividono i bambini a coppie e si inizia il gioco (Video 2 nel CD allegato: mostra due bambini che spiegano come si gioca al *Jeu de Bataille*).

<p>JEUX DE CARTES : LE JEU DE BATAILLE</p> <p>Le jeu de cartes "La Bataille" se joue à deux avec un jeu de 40 cartes.</p> <p>Déroulement:</p> <p>Les cartes sont distribuées entre les 2 joueurs (le donneur doit distribuer le total).</p> <p>Pour commencer, chaque joueur fait un paquet de ses cartes sans les ordonner et sans les regarder.</p> <p>À chaque tour, chaque joueur retourne une carte de son paquet sur la table.</p> <p>Si les cartes posées ne désignent pas le même nombre, le joueur qui a la carte désignant le plus grand nombre prend les deux cartes et les met de côté.</p> <p>Si les cartes posées désignent le même nombre, il y a bataille : les joueurs disent «bataille !», ils posent chacun une nouvelle carte sur la table et "la plus forte" permet de ramasser toutes les cartes.</p> <p>Le gagnant d'une partie de Bataille est celui qui aura le plus grand nombre de cartes.</p>	
---	--

Scheda 2 – Regole del gioco di carte Le jeu de bataille

CRICETO

Obiettivi specifici:

- riconoscere le quantità e le loro diverse rappresentazioni (entro il 10);
- acquisire i fatti aritmetici entro il 10;

²⁶ La lingua francese viene utilizzata nelle scuola valdostane per l'insegnamento di parte delle discipline scolastiche come previsto dagli articoli 39 e 40 dello Statuto Speciale della Valle d'Aosta. www.scuole.vda.it/index.php/didattica/biling/donnees-generales

- saper confrontare le quantità entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

In questa attività, possono, se necessario per rendere più semplice l'attività, essere inizialmente utilizzate solo alcune tipologie di carte, ad esempio quelle che risultano ai bambini più facili da riconoscere. In seguito si passerà all'utilizzo di tutti i tipi di rappresentazioni in modo da permettere il confronto tra le diverse tipologie di rappresentazioni delle quantità e di operare transcodifiche da un registro di rappresentazione all'altro.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

questo gioco prevede che i bambini possano essere suddivisi in gruppi più numerosi, in modo da permettere il confronto di ogni alunno con un numero maggiore di compagni durante il gioco favorendo la discussione delle regole del gioco e delle strategie utilizzate, quindi l'insegnante può decidere di volta in volta di quanti bambini comporre il gruppo di gioco. Anche in questo caso è predisposta una scheda (Scheda 3) con le regole del gioco (Allegato 15). Dopo aver letto collettivamente e discusso le regole del gioco, si può passare all'organizzazione dei gruppi e al gioco (Video 3 nel CD allegato: mostra 5 bambini intenti a giocare a Criceto). La discussione collettiva delle regole è un momento importante per l'insegnante perché permette di valutare il coinvolgimento dei bambini, la loro comprensione delle modalità di svolgimento dell'attività proposta oltre a favorire negli alunni la metacognizione.

GIOCHI DI CARTE : CRICETO

Si gioca con un numero variabile di giocatori (ma non più di 20), con un mazzo da 40 carte.

Lo scopo del gioco é di **restare senza carte**. Perde chi rimane con l'ultima carta in mano e diventerà il criceto !



Svolgimento del gioco:

All'inizio della partita il mazziere sceglie (o fa scegliere) casualmente una carta che verrà eliminata dal mazzo e messa da parte senza essere vista da nessuno. Poi distribuisce tutte le restanti carte ai giocatori, una per volta; può capitare che il numero di carte non sia lo stesso per tutti e alcuni ricevano una carta in meno, ma non è un problema.

Appena ricevute le carte ogni giocatore deve formare le coppie di carte dello stesso valore (con le carte che ha in mano) e scartarle mettendole in mezzo al tavolo. Ad esempio, se possiede due uno, due tre, due cinque, ecc., li scarta mettendoli in mezzo al tavolo.

A questo punto a ognuno rimarrà in mano un numero variabile di carte: chi ne ha di più inizia a giocare. Il giocatore di turno prende una carta a caso, senza vederla, dal giocatore alla sua sinistra. Se la carta forma una coppia con un'altra che ha già in mano, allora le scarta entrambe, altrimenti la tiene in mano. Il turno passa poi al giocatore alla sua destra che a sua volta prenderà una carta e così via.

Alla fine una sola carta rimarrà spaia. Naturalmente perde chi rimane con questa carta in mano, persona che diventerà il criceto . . .

Scheda 3 – Regole del gioco di carte Criceto

I NUMERI AMICI

Obiettivi specifici:

- acquisire i fatti aritmetici entro il 10;
- eseguire mentalmente semplici operazioni naturali;
- verbalizzare le procedure di calcolo operando trascodifiche dal codice simbolico a quello verbale;
- saper comporre e scomporre i numeri in insiemi più semplici per permette la familiarizzazione con i fatti aritmetici;
- saper raggruppare.

Strumenti:

- carte con pallini vuoti da colorare.

Quest'attività prevede l'utilizzo delle solo carte con i pallini vuoti da colorare, in quanto mira all'individuazione delle rappresentazioni possibili che risultano

per i bambini più facili da “leggere”, intendendo quelle più semplici da riconoscere attraverso il canale visivo, delle quantità.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

quest’attività propone agli alunni il percorso per costruire gli “amici” di un numero. Per “amici” di un numero si intendono due numeri che sommati compongono il numero stesso, ad esempio 2 e 3 sono gli amici del 5. Quest’attività può essere preceduta da una attività di manipolazione delle quantità che permette ai bambini di ancorare un lavoro di tipo cinestetico alla rappresentazione mentale delle quantità (come ad esempio la manipolazione di tappi). Per questo tipo di attività si utilizzano carte con pallini bianchi da colorare (Allegato 16), lo stesso modello di carte con pallini da colorare potrà essere utilizzato per “scoprire” gli amici dello 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Se necessario le carte possono essere tagliate e modificate predisponendo carte con nessun pallino, 1 pallino, 2 pallini...Di seguito si prenderà in esame la sequenza corretta di azioni per comporre gli “amici” del 5:

- trovare i 3 modi possibili per formare la quantità desiderata e colorare i pallini (2-3, 1-4, 0-5) utilizzando 2 colori diversi (es: 2 pallini blu e 3 pallini rossi) in modo che i fatti aritmetici siano immediatamente percepibili osservando le carte, quindi potenziando la loro acquisizione attraverso il canale visivo non verbale (capitolo I, paragrafo 1.4.1);
- individuare la rappresentazione che risultano per i bambini più facili da “leggere”, intendendo quelle più semplici da riconoscere attraverso il canale visivo;
- confrontare il lavoro di tutti gli alunni , attraverso un momento di mise en commun, e scegliere i modelli che riportano alla disposizione dei dots sul “dado” (disposizione convenzionale), che normalmente risulta la più familiare per tutti i bambini;

- incollare sul quaderno i 3 modelli (2-3, 1-4, 0-5), colorarli uguali ai modelli selezionati, leggere l'immagine e passare dal codice verbale alla trascrizione in codice arabico (codice visivo-verbale) per consolidare la corrispondenza tra quantità e codice arabico;
- ridistribuire altre carte agli alunni (Allegato 16);
- scrivere sul retro delle nuove carte i fatti aritmetici individuati, ad esempio $2+3$ $3+2$, e usarle per giocare a *Recto verso* (Allegato 17), attività ludiforme che verrà descritta in seguito tra le attività di potenziamento;

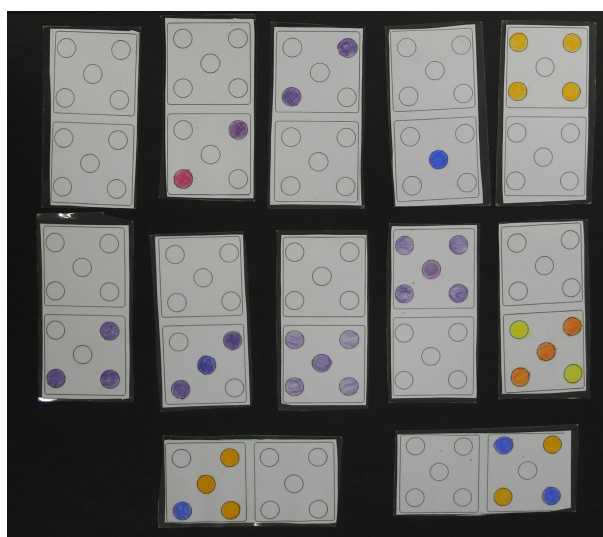


Immagine 1 - Esempi di carte utilizzate dai bambini per effettuare l'attività Gli "amici" dei numeri

Prima di passare agli amici di altri numeri più grandi (6, 7, 8, 9), si è prevista un'attività di tipo manipolativo con i tappi, che permette ai bambini di ancorare un lavoro di tipo cinestetico alla rappresentazione mentale delle quantità. Di seguito, le fasi che la compongono:

- dotare i bambini di un sacchetto contenente alcuni tappi;
- chiedere di formare un gruppo di 6 tappi disposti in verticale o in orizzontale;

- chiedere ai bambini di selezionare le rappresentazioni che si “leggono” più rapidamente e usarle come modello di riferimento per la classe, si può anche prevedere che i bambini abbiano rappresentazioni differenti sul grado di leggibilità, in tal caso si accettano anche più rappresentazioni di disposizioni dei pallini;
- utilizzare carte con i pallini da colorare predisposti in modo convenzionale per le quantità corrispondenti;
- trovare tutte le combinazioni possibili della quantità oggetto del lavoro ($0 + 6$; $1 + 5$; $2 + 4$; $3 + 3$);
- rappresentare tutte le soluzioni trovate sul quaderno, disegnando delle carte con dei pallini disposti come i tappi sul tavolo, far verbalizzare ai bambini quello che “leggono” e passare dal codice verbale alla trascrizione nel codice numerico arabico;
- rappresentare le soluzioni su delle carte, da una parte con i “dots” dall’altra parte riportare il fatto aritmetico (Figura 4);
- utilizzare le carte plastificate per giocare a *Recto verso*.



Immagine 2 - Esempio di una carta (davanti e dietro) utilizzata per il gioco Gli “amici” dei numeri per la formazione della quantità 6

Per gli amici del 10, è necessario utilizzare le carte con la rappresentazione analogica delle 2 mani, che rispettano la disposizione delle dita delle mani in cinque e favoriscono la “gnosia digitale”. Si utilizzati sempre al massimo 2 colori, per rendere percettivamente evidenti le scomposizioni dei numeri, con lo stesso procedimento degli “amici” del 5.

3.4.1.3 Attività di consolidamento e potenziamento

Oltre alle attività precedenti sono state pensate delle attività di consolidamento e potenziamento da utilizzare laddove all'interno della classe vi siano alunni che presentino ulteriori difficoltà o necessitino di consolidare maggiormente quanto appreso.

Obiettivi specifici:

- consolidare il riconoscimento delle quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- potenziare l'acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10;
- potenziare l'esecuzione mentale di semplici operazioni naturali;
- verbalizzare le procedure di calcolo operando trascodifiche dal codice simbolico a quello verbale;
- potenziare la capacità di comporre e scomporre i numeri in insiemi più semplici per permettere la familiarizzazione con i fatti aritmetici;
- potenziare la capacità di raggruppare;
- consolidare la capacità di confrontare le quantità entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica (Allegato 1-2);
- carte con rappresentazione analogica delle dita (Allegato 2-3);
- carte con dots disposti in modo convenzionale (Allegato 4-5-6-7-8);
- carte con dots disposti in modo non convenzionale (Allegato 4-5-6-7-8).

Gli artefatti proposti in queste attività sono gli stessi introdotti per le attività precedenti, questa scelta è stata fatta per potenziare i processi di apprendimento carenti utilizzando il materiale già familiare agli alunni. Tali artefatti, come detto in precedenza nel paragrafo 3.4.1.1, sono uno strumento per veicolare il sapere matematico e devono diventare strumenti mentali grazie all'utilizzo quotidiano e alla pratica sociale relativa al loro uso (Bartolini Bussi, 2011).

RECTO VERSO

Obiettivi specifici:

- consolidare il riconoscimento delle quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- potenziare l'acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10;
- verbalizzare le procedure di calcolo operando trascodifiche dal codice simbolico a quello verbale;
- saper comporre e scomporre i numeri in insiemi più semplici attività che permette la familiarizzazione con i fatti aritmetici;

Strumenti:

- carte preparate per le attività degli “amici” di un numero (ad esempio gli amici del 5).

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

disporre i bambini a coppie; a turno un bambino mostra una carta con gli “amici” di un numero rappresentati con i dots colorati; l'altro bambino deve dire ad alta voce i fatti aritmetici che vede rappresentati nella carta (cioè il numero somma dei dots visualizzati) e che sono scritti sul retro della carta. Se indovina, vince la carta, altrimenti la carta viene vinta dal bambino che l'ha mostrata. I bambini si alternano, mostrando uno alla volta le proprie carte, fino a quando non saranno esaurite. Alla fine, vince chi ha più carte. Il gioco può essere svolto anche mostrando prima i fatti aritmetici.

In alternativa si può procedere come per il gioco *Jeu de Bataille*, descritto in precedenza, e distribuire ad ogni bambino la scheda con le regole del gioco (Allegato 18) e dopo averla incollata sul quaderno si procede alla lettura delle regole, che anche in questo caso, sono state scritte in francese

Giochi di carte : RECTO VERSO

Le jeu de cartes "recto verso" se joue à deux avec un nombre variable de cartes.
Au recto figure un dessin-calcul, au verso figure le résultat.

Déroulement:

Toutes les cartes sont étalées sur la table côté recto visible.

Un élève propose un calcul en désignant une carte, l'autre élève doit donner le résultat.

On retourne la carte pour vérifier. Si la réponse est correcte, l'élève qui a répondu prend la carte. Sinon, c'est celui qui a questionné qui la prend.

Les rôles sont échangés à chaque coup.

Chaque carte gagnée donne un point.

En fin de partie, chaque élève comptabilise ses points. Celui qui a le plus de points a gagné.

Scheda 4 – Regole del gioco Recto Verso

LE JEU DE BATAILLE

Obiettivi specifici:

- consolidare il riconoscimento delle quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- saper confrontare le quantità entro il 10;
- potenziare l'acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

in questo caso il gioco segue quello del *Jeu de Bataille* presentato in precedenza ma vengono utilizzate le carte degli “amici” dei numeri;

QUANTO FA?

Obiettivi specifici:

- potenziare l’acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10;
- potenziare il calcolo mentale veloce;

Durata:

circa 10 min.

Descrizione:

l’insegnante enuncia i fatti aritmetici e gli alunni scrivono, senza passare per il processo di conta, il risultato. Questa attività, che ha lo scopo di rinforzare la memorizzazione dei fatti aritmetici, sembra avere maggiore efficacia se svolta quotidianamente, ad esempio ad inizio lezione;

GIOCO DI CARTE A CASA

Obiettivi specifici:

- consolidare il riconoscimento delle quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- potenziare l’acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10;
- saper confrontare le quantità entro il 10;
- potenziare il calcolo mentale in semplici operazioni naturali e verbalizzare le procedure di calcolo;

- consolidare la composizione e la scomposizione dei numeri in insiemi più semplici;
- potenziare la capacità di raggruppare.

Strumenti:

- carte con le cifre in rappresentazione arabica;
- carte con rappresentazione analogica delle dita;
- carte con dots disposti in modo convenzionale;
- carte con dots disposti in modo non convenzionale.

Durata:

circa 10 min.

Descrizione:

i bambini hanno a disposizione le carte precedentemente preparate, le ripongono dentro ad una cartellina che mettono in cartella da portare a casa. L'insegnante chiede ai bambini di giocare ai giochi presentati anche quando sono a casa, con parenti e amici;

GIOCO DELL'OCA

Obiettivi specifici:

- consolidare il riconoscimento delle quantità e le loro rappresentazioni (entro il 10);
- potenziare l'acquisizione dei fatti aritmetici entro il 10;
- saper confrontare le quantità entro il 10;
- potenziare il calcolo mentale in semplici operazioni naturali e verbalizzare le procedure di calcolo;
- consolidare la composizione e la scomposizione dei numeri in insiemi più semplici;
- potenziare la capacità di raggruppare.

Strumenti:

- tabellone con percorso;
- dadi con le quantità rappresentate con le cifre in rappresentazione arabica, le dita e i dots;

- pedine.

Durata:

circa 20 min.

Descrizione:

l'insegnate predispone un tabellone (vedere gioco dell'oca classico) con un percorso suddiviso in casella anche senza numeri e alcuni dadi con le quantità 1, 2, 3 rappresentati con le cifre, le dita, o i dots. I bambini a turno tirano il dado e muovono la propria pedina all'interno del percorso partendo dal via e andando verso l'arrivo.



Immagine 3 - Diverse tipologie di carte plastificate usate dai bambini

3.4.2 Fase 2 – Sperimentazione delle attività didattiche

Durata: dicembre 2013 a gennaio 2015

Le insegnanti delle classi sperimentali, dopo aver elaborato il materiale e concordato le attività da svolgere in classe, passate alla fase di sperimentazione. Questa fase prevedeva che ogni insegnante svolgesse nelle proprie classi le attività sperimentali programmate.

Le attività proposte nelle classi miravano al potenziamento della capacità di *subitizing* attraverso la stimolazione del canale visivo non verbale e sono state progettate attingendo alle teorie neuropsicologiche relative ai modelli di McCloskey, Caramazza e Basili (1985), Dehaene e Cohen (1992), focalizzando l'attenzione sulla rappresentazione analogica del numero in modo da sviluppare nell'alunno l'immagine mentale della quantità. Una delle rappresentazioni analogiche utilizzate era quella delle dita che, rispettando la suddivisione in base cinque delle dita delle mani, aveva lo scopo di favorire il passaggio dalla manipolazione cinestetica delle quantità alla "gnosia digitale", intesa come rappresentazione mentale delle quantità Butterworth (1999). Inoltre scopo fondamentale delle attività era di sviluppare la consapevolezza degli alunni rispetto ai diversi codici o registri con cui il numero può essere espresso, riprendendo la teoria di Duval (2006) relativa alle rappresentazioni semiotiche. Per questo motivo gli artefatti utilizzati (carte con dots in disposizione convenzionale e non convenzionale, carte con rappresentazione analogica delle dita e carte con cifre in disposizione arabica) sono stati gli stessi in ogni attività fungendo da filo conduttore tra un'attività e l'altra e hanno permesso di lavorare contemporaneamente con più registri, coordinandoli e alternando gli uni agli altri al fine di giungere alla consapevolezza che uno stesso oggetto matematico può essere comunicato con diverse forme di rappresentazione. La strutturazione del materiale offre, quindi, la possibilità di passare continuamente da un tipo di rappresentazione ad un altro, in accordo con la teoria di Duval (2006), ciò permette alle insegnanti di utilizzare con i diversi bambini le carte maggiormente interiorizzate nelle attività che richiedono un maggiore impegno cognitivo, mentre per le attività quotidiane possono essere utilizzate tutte le carte, anche quelle che i bambini riconoscono meno facilmente, favorendo così la familiarizzazione con le rappresentazioni che risultano più difficili da riconoscere.

Inoltre scopo delle attività era promuovere una progressiva memorizzazione dei fatti aritmetici in modo che il loro recupero mnemonico divenisse la strategia più veloce ed economica a cui attingere, riprendendo i concetti sottesi

alla “Simple Arithmetic” (Ashcraft 1994, Geary 1990, Sigler e Mitchel 1982) e aumentando il criterio interno di “livello di fiducia” rispetto alle strategie di recupero dei fatti aritmetici che Carpenter e Moser (1982) definiscono strategia del *know facts*, secondo la quale i bambini danno la risposta direttamente, senza contare, recuperando conoscenze fattuali dalla memoria.

L’attenzione dell’insegnante è rivolta in particolar modo a processi cognitivi ritenuti fondamentali e prioritari nella disciplina, ovvero l’apprendimento delle strategie più appropriate alle richieste del compito, all’acquisizione da parte del bambino di una maggior autoregolazione dei propri processi di apprendimento ed infine al potenziamento e generalizzazione degli apprendimenti attraverso la routine costruite con tali giochi (ripetizioni quasi quotidiane di alcune attività ludiformi).

Le insegnanti promuovono un approccio alle varie rappresentazioni delle quantità, sin dalle prime fasi, graduale e caratterizzato dal recupero delle proprie esperienze e dalla valorizzazione delle caratteristiche individuali.

Come emerge dalla descrizione dell’iter metodologico delle varie attività del paragrafo precedente, le modalità di gioco variano da un gioco ad un altro, mentre il materiale utilizzato prevede che rimangano invariate le tipologie di rappresentazioni in modo da permettere il consolidamento della corrispondenza tra semante quantitativo, simbolo arabo, dots, rappresentazione con le dita e codice verbale e il recupero mnemonico dei fatti aritmetici. Alcuni giochi presentano delle consegne scritte da leggere e discutere collettivamente, altri la negoziazione iniziale delle regole del gioco, altri ancora si basano sulle regole di giochi tradizionali già conosciuti dai bambini.

Le attività proposte nelle classi, oltre a essere momenti di acquisizione di nuove conoscenze attraverso attività accattivanti, hanno permesso la stimolazione rispetto alla riflessione metacognitiva. Questo secondo aspetto è stato sviluppato sia dalle domande dell’insegnante poste agli alunni durante le attività, le quali avevano l’obiettivo di rendere consapevole il bambino delle molteplici rappresentazioni delle quantità e di farlo familiarizzare con esse, sia dai momenti di discussione e di negoziazione delle regole dei giochi previste

da alcune attività, sia dalle riflessioni spontanee dei bambini durante le fasi di gioco.

La chiave per motivare i bambini e coinvolgerli attivamente è stata quella di rendere le attività piacevoli e accattivanti, ciò ha permesso ai bambini di accostarsi volentieri al lavoro sul *subitizing*. Esse sono state proposte in modo da stimolare l'attenzione e l'interesse dei bambini. Per tutta la durata della sperimentazione hanno svolto un ruolo cruciale le attività ludiformi, che venivano utilizzate sia come attività in sé, sia come supporto ogni qualvolta i contenuti da trattare risultavano particolarmente complessi, sia come attività di rinforzo svolte quotidianamente. L'approccio ludiforme, inoltre, ha permesso l'acquisizione del *subitizing* anche in momenti extrascolastici non strutturati, abbinando l'aspetto ludico ad attività di rinforzo: gli alunni portavano a casa le carte per continuare i giochi svolti a scuola. Gli spazi quotidiani pensati e strutturati appositamente hanno permesso ai bambini di giocare, ma, allo stesso tempo, di allenarsi costantemente e fare esperienze con le quantità, le loro varie rappresentazioni e il passaggio tra i diversi registri semiotici, stimolando i processi cognitivi implicati nella capacità di attivare il *subitizing*.

Elementi importanti sono stati poi il divertimento e il coinvolgimento diretto, i quali, contestualizzando le attività, le hanno rese più semplici ed immediate, e le regole, che hanno permesso di rispettare i tempi propri di ciascun momento, favorendo un buon clima di lavoro.

In particolare la fase della sperimentazione ha permesso alle insegnanti del team di ricerca di far crescere le proprie capacità progettuali e l'apprendimento di modalità di autovalutazione della pratica didattica che hanno consentito di incrementare le capacità di:

- leggere e analizzare l'attività educativa posta in essere, individuandone sia i punti di eccellenza, sia gli elementi di criticità;
- individuare e introdurre, in relazione all'analisi dell'esistente ed alle criticità rilevate, cambiamenti migliorativi, nell'organizzazione della didattica e, in particolare, del contesto educativo.

Dalle riflessioni delle insegnanti al termine della fase di sperimentazione è emerso che:

- gli alunni si sono dimostrati sempre entusiasti, disponibili e collaborativi rispetto alle attività proposte;
- le carte sono state un ottimo strumento di mediazione semiotica, grazie alla loro fruibilità e al fatto di essere state elemento comune di tutte le attività;
- l'organizzazione iniziale e la preparazione del materiale per ogni alunno necessita di diverso tempo;
- a volte il riordino delle carte ha richiesto troppo tempo;
- le carte, a volte, venivano perse dai bambini fatto che portava a doverle ricontare ogni volta e eventualmente rifarle;
- l'utilizzo degli artefatti nelle attività di consolidamento extrascolastico ha dato maggiore significatività al lavoro svolto nelle classi, permettendo il coinvolgimento nelle attività ludiformi di parenti e amici, questo ha favorito un collegamento tra attività scolastiche e extrascolastiche;
- sarebbe auspicabile che parte delle attività progettate vengano proposte dalle insegnanti della scuola dell'infanzia, ai bambini di dell'ultimo anno (5 anni) , anche nell'ottica della continuità didattica, in modo tale da anticipare il più possibile il lavoro di potenziamento del *subitizing* e la familiarizzazione con i diversi registri di rappresentazione e con gli artefatti prodotti.
- il lavoro svolto nelle classi è stato particolarmente con i bambini che potevano essere individuati come potenziali soggetti con difficoltà in matematica, anche in base al passaggio di informazioni avvenuto tra le insegnanti della scuola primaria e quelle della scuola dell'infanzia,

basato sui risultati delle prove Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica (BIN).²⁷

3.4.3 Fase 3 - Costruzione dello strumento di valutazione

3.4.3.1 Costruzione dello strumento e prima somministrazione

Durante gli incontri periodici previsti dal progetto *Questione di numeri* è emersa la necessità di valutare l'efficacia del lavoro svolto nelle classi anche da un punto di vista quantitativo. A questo scopo, abbiamo ideato una sorta di test somministrato sia nelle classi che hanno seguito il percorso sperimentale, sia in un gruppo di controllo, costituito da classi del medesimo grado scolastico di quelle considerate nella sperimentazione, con un numero più o meno uguale di alunni, che però non hanno seguito il percorso sperimentale.

Scopo principale del test è stato indagare l'efficacia del percorso didattico rispetto alla correttezza e alla velocità di risposta in compiti dove si richiede sostanzialmente di operare riconoscimenti di quantità, di richiamare fatti aritmetici (entro il 10) e di eseguire calcoli a mente (entro il 10).

La somministrazione del test ha permesso di raccogliere e confrontare i risultati emersi nei due gruppi e di validare, dal punto di vista quantitativo, la nostra ipotesi di ricerca secondo la quale attività didattiche che prevedono l'uso di specifici strumenti capaci di potenziare il fenomeno del *subitizing*, possono favorire l'acquisizione di fatti aritmetici, consolidando lo sviluppo di strategie efficaci per il calcolo mentale. In particolare, sulla base di quest'ipotesi e degli elementi teorici del presente lavoro di ricerca, le attività e i materiali sviluppati si basano e utilizzano prevalentemente il canale visivo non verbale.

²⁷ La batteria BIN 4-6 propone una serie di prove per l'esame delle componenti di base dell'apprendimento matematico, e permette di individuare profili di rischio nelle competenze e abilità relative all'«intelligenza numerica» in bambini dai 4 ai 6 anni, suddivise in 5 fasce d'età, che tengono conto degli incrementi costanti e naturali di sviluppo. In particolare, le 11 prove di cui si compone la batteria indagano i processi semantici, quelli relativi al conteggio, quelli lessicali e quelli pre-sintattici.

Il test si compone di quattro diverse prove caratterizzate da due esercizi di riconoscimento istantaneo delle quantità e due esercizi di somma di due quantità, con diversi tempi di somministrazione. Esso prevede che le insegnanti mostrino ai bambini le carte che rappresentano quantità tramite diversi registri (Figura 6-7) (carte, dita, ...) e che i bambini riconoscano e scrivano, in un tempo pre-determinato (4-5 secondi), all'interno della casella di una griglia preparata appositamente (Figura 4) le quantità mostrate.

Il team di ricerca ha ipotizzato, inizialmente, che il tempo necessario ai bambini per riconoscere e scrivere una quantità all'interno delle caselle della griglia potesse essere di 4 o 5 secondi, a seconda dell'esercizio, in base all'analisi delle prove di valutazione delle abilità di calcolo del test Test di valutazione delle abilità di calcolo e problem solving (AC-MT),²⁸ strumento di misurazione delle abilità matematiche in alunni dai 6 agli 11 anni, che vengono svolte abitualmente nelle scuole primarie.

Le prove del test di valutazione delle attività sperimentali oggetto della ricerca *Dal subitizing ai fatti aritmetici* prevedono l'utilizzo di tre tipologie di rappresentazioni diverse: le cifre, codice arabico, utilizzano il linguaggio simbolico; le carte con i dots sono presentate in codice analogico utilizzano il linguaggio iconico; le dita delle mani utilizzate dalle insegnanti per mostrare le quantità nell'ultimo esercizio della prova. L'utilizzo di diverse tipologie di rappresentazioni conduce a conoscere i diversi significati del numero, inteso come quantità, attraverso differenti canali di accesso e di decodifica.

Gli esercizi del test richiedono il riconoscimento delle carte, utilizzando esclusivamente il canale visivo non verbale e la trascrizione in codice verbale delle quantità riconosciute, quindi il passaggio da un tipo di rappresentazione ad un altro che è stato uno degli obiettivi principali delle attività svolte nelle classi sperimentali.

²⁸ Il test AC-MT di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi è uno strumento di misurazione delle abilità matematiche in alunni dai 6 agli 11 anni di facile e rapida somministrazione e, al contempo, con buone proprietà psicometriche.

La griglia di rilevazione, mostrata di seguito (Figura 7), è suddivisa in quattro parti, una per ogni esercizio previsto dal test.

ESERCIZIO 1: Scrivi il risultato.

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

ESERCIZIO 2: Scrivi quanti pallini vedi.

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

ESERCIZIO 3: Scrivi il risultato.

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

ESERCIZIO 4: Scrivi il risultato.

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 7 - Griglia di rilevazione da completare, ad opera degli alunni, durante il test

Ogni parte prevede un numero di caselle corrispondente al numero delle carte mostrate. I bambini dovevano lasciare vuote le caselle corrispondenti alle carte

che non erano in grado di riconoscere nell'intervallo di tempo previsto. Un'altra griglia simile faceva parte del materiale per l'insegnate preparato per il test e conteneva la rappresentazione della successione delle carte da mostrare (Figura 8).

32 carte con numeri, no commutativa.

1+8	4+3	0+4	1+5	2+4	3+2	3+6	3+3
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1+2	0+0	5+3	1+6	7+2	7+1	2+2	1+0
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

8+0	5+2	5+5	7+3	8+2	1+4	0+2	1+9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

4+5	7+0	0+10	9+0	1+3	6+4	2+6	1+1
-----	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----

32 addizione con pallini non commutativa, prime 16 carte con pallini riconoscere quantità

5	3	0	7	8	2	10	1
---	---	---	---	---	---	----	---

4	9	6	8	5	3	9	7
---	---	---	---	---	---	---	---

+16 con addizione tra carte con pallini.

2+8	9+1	2+2	5+5	1+7	4+2	0+6	5+4
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1+1	3+4	6+2	4+4	5+1	3+7	3+3	6+1
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

addizione con le dita

0+1	3+2	2+5	2+0	1+4	4+3	5+1	2+1
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

4+4	1+1	3+3	0+0	2+3	5+2	4+0	3+5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

0+3	5+3	4+2	2+2	5+5	5+4	5+0	3+1
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Figura 8 - Griglia con le sequenze richieste in ogni esercizio del test

Prima prova

L'insegnante mostra, per 5 secondi, le carte (Figura 9) che rappresentano addizioni con le cifre. Ai bambini viene richiesto di scrivere direttamente il risultato all'interno delle caselle della griglia di rilevazione esercizio 1 (Figura 7). La scelta di iniziare con la rappresentazione delle addizioni con le cifre in codice arabico è stata fatta per mettere tutti i bambini, quelli delle classi sperimentali e quelli delle classi di controllo, di fronte ad un tipo di richiesta a loro familiare che diminuisse il più possibile i livelli di ansia nei confronti del test.

$1+8$	$2+4$	$1+2$	$7+2$
$4+3$	$3+2$	$0+0$	$7+1$
$0+4$	$3+6$	$5+3$	$2+2$
$1+5$	$3+3$	$1+6$	$1+0$

Figura 9 - Cartellini da mostrare agli alunni con le addizioni da svolgere

Seconda prova

L'insegnante mostra agli alunni le carte (Figura 10) che rappresentano i dots, per 4 secondi, ai bambini viene richiesto di scrivere direttamente la quantità corrispondente al numero dei dots mostrati all'interno delle caselle della griglia di rilevazione esercizio 2 (Figura 7). La scelta dei dots in disposizione convenzionale è stata fatta perché, come visto nel paragrafo 3.5.1, è spesso presente nei giochi dei bambini, quindi, sempre nell'ottica di favorire

un approccio alla prova meno ansiogeno, questo tipo di rappresentazione non risultava del tutto sconosciuta ai bambini del gruppo di controllo. Questo esercizio prevede che venga mostrata una sola carta con i dots a differenza dell'esercizio successivo, di modo da permettere ai bambini del gruppo di controllo, che non hanno utilizzato nelle attività in classe questo tipo di rappresentazione, di familiarizzare con questo tipo di carte in un esercizio che richiede il riconoscimento delle quantità mostrate, prima di passare alle richieste dell'esercizio 3 che risultano più complesse in quanto richiedono di effettuare la somma di due carte con i dots.

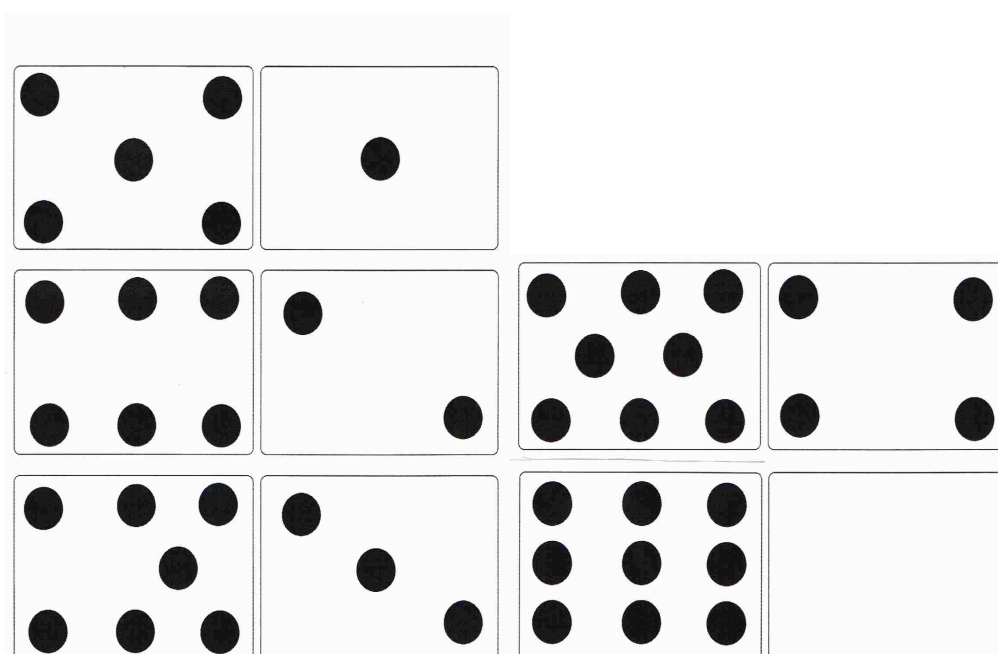


Figura 10 - Carte da mostrare agli alunni con i dots in disposizione convenzionale

Terza prova

L'insegnante mostra agli alunni due carte per volta (Figura 10) che rappresentano i dots, per 5 secondi. Ai bambini viene richiesto di scrivere direttamente la somma dei dots delle due carte all'interno delle caselle della griglia di rilevazione esercizio 3 (Figura 7). Questo esercizio risulta più complesso rispetto al precedente perché richiede sia il riconoscimento delle quantità mostrate sia la loro somma. Inoltre utilizza i dots quindi come

l'esercizio precedente richiede il passaggio da un sistema iconico di rappresentazione alla scrittura in codice arabico quindi l'utilizzo di un linguaggio simbolico.

Quarta prova

L'insegnante mostra agli alunni utilizzando le dita di una mano un numero e subito dopo un altro numero. Ai bambini viene richiesto di scrivere direttamente la somma delle due quantità mostrate dalle dita dell'insegnante all'interno delle caselle della griglia di rilevazione esercizio 4 (Figura 7). Il tempo a disposizione dei bambini per effettuare la somma era, anche in questo caso, 5 secondi. Questa prova differisce dalle precedenti sia perché non è previsto l'utilizzo della carte ma delle dita per mostrare le quantità da riconoscere, sia perché le due quantità da riconoscere e sommare vengono mostrate una in successione all'altra. Questa prova richiede, quindi, ai bambini di riconoscere una quantità mostrata, mantenerla in memoria, riconoscere la seconda quantità e sommarla alla precedente.

Dopo la progettazione del test le insegnanti hanno concordato di effettuare una prima somministrazione in una classe seconda individuata come "classe prova"; l'obiettivo era di misurare la funzionalità e l'attendibilità del test sia dal punto di vista dei contenuti sia dei tempi predisposti per l'esecuzione degli esercizi. L'intera fase di somministrazione è stata filmata e dall'analisi dei filmati (Video 4-5 nel CD allegato) si è notato che alcuni bambini avevano modo di utilizzare le dita per contare i dots e per calcolare le somme, per questo il test è stato rimodulato in particolare per quanto riguarda i tempi. In seguito è avvenuta la distribuzione del materiale per la somministrazione del test in tutte le classi, quelle del gruppo sperimentale e quelle del gruppo di controllo: griglia di riferimento (Figura 8); la spiegazione delle modalità di somministrazione elaborate per le insegnanti del gruppo di ricerca e per le insegnanti delle classi di controllo; la richiesta alle insegnanti disponibili di

filmare l'intera somministrazione delle prove al fine di analizzare i comportamenti degli alunni.

Dopo questa somministrazione le insegnanti si sono confrontate circa le modalità e i tempi delle prove e hanno iniziato ad analizzare i dati presenti all'interno delle griglie di rilevazione. Sono stati anche analizzati i filmati realizzati all'interno delle classi con l'obiettivo di porre l'attenzione sui punti di forza e sulle criticità del test.

I dati raccolti sono stati inseriti in alcune tabelle che riportano in rosso i dati che fanno riferimento alle classi sperimentali, in blu i dati che si riferiscono alle classi di controllo. La scelta di utilizzare due colori è stata fatta per rendere più chiare le tabelle e il confronto dei dati raccolti.

La tabella 1 viene qui riportata per ricordare la distribuzione del numero degli alunni nelle classi, analizzata nel dettaglio nel paragrafo 3.3.1, per permettere una più chiara lettura delle tabelle seguenti che riportano i dati del test.

Classi sperimentali	Alunni	Classi di controllo	Alunni
Fénis	17	Aosta	22
Plan Félinaz	10	Chatillon sez. A	20
Saint- Vincent	30	Chatillon sez. B	20
Totale	57	Totale	62

Tabella 1 - Dettaglio numerosità classi sperimentali e di controllo

La Tabella 2a indica per ogni item il numero degli errori commessi dagli alunni delle classi sperimentali, il totale degli errori per ogni esercizio e il totale degli errori della prova; la Tabella 2b indica la percentuale di errore in ogni item della prova.

Errori per ogni item classi sperimentali									Errori Tot.	
Es. 1	4	8	0	4	3	1	8	2	184	471
	0	0	3	5	1	2	0	0		
	1	2	0	6	2	3	1	4		
	5	0	0	0	1	8	7	0		
Es. 2	0	0	0	1	1	0	9	0	81	
	0	3	1	1	0	0	3	2		
Es. 3	12	2	1	3	5	2	1	3	110	
	0	2	3	2	1	4	0	0		
Es. 4	1	3	2	0	0	6	2	0	96	
	2	1	0	1	6	1	4	3		
	1	6	8	1	2	1	2	1		

Tabella 2a - Errori commessi dagli alunni delle classi sperimentali

Percentuale di errore in ogni item									
Es. 1	14,81	29,63	0,00	14,81	11,11	3,70	29,63	7,41	
	0,00	0,00	11,11	18,52	3,70	7,41	0,00	0,00	
	3,70	7,41	0,00	22,22	7,41	11,11	3,70	14,81	
	18,52	0,00	0,00	0,00	3,70	29,63	25,93	0,00	
Es. 2	0,00	0,00	0,00	3,70	3,70	0,00	33,33	0,00	
	0,00	11,11	3,70	3,70	0,00	0,00	11,11	7,41	
Es. 3	44,44	7,41	3,70	11,11	18,52	7,41	3,70	11,11	
	0,00	7,41	11,11	7,41	3,70	14,81	0,00	0,00	
Es. 4	3,70	11,11	7,41	0,00	0,00	22,22	7,41	0,00	
	7,41	3,70	0,00	3,70	22,22	3,70	14,81	11,11	
	3,70	22,22	29,63	3,70	7,41	3,70	7,41	3,70	

Tabella 2b - Percentuale di errore in ogni item delle classi sperimentali

La Tabella 3a indica per ogni item il numero degli errori commessi dagli alunni delle classi di controllo, il totale degli errori per ogni esercizio e il totale degli errori della prova; la Tabella 3b indica la percentuale di errore in ogni item della prova.

Errori per ogni item									Errori Tot	
Es. 1	9	9	1	5	11	6	22	8	233	475
	2	1	6	12	7	9	4	7		
	5	2	2	7	7	5	3	13		
	6	6	6	5	5	15	22	5		
Es. 2	1	2	0	7	8	1	25	0	93	
	4	10	5	8	2	1	9	10		
Es. 3	18	14	2	8	11	7	7	9	123	
	3	7	3	6	7	12	2	7		
Es. 4	6	7	9	5	7	16	14	9	166	
	8	6	6	4	8	7	6	10		
	3	6	10	5	1	5	3	5		

Tabella 3a - Errori prove commessi dagli alunni delle classi di controllo

Es. 1	14,52	14,52	1,61	8,06	17,74	9,68	35,48	12,90
	3,23	1,61	9,68	19,35	11,29	14,52	6,45	11,29
	8,06	3,23	3,23	11,29	11,29	8,06	4,84	20,97
	9,68	9,68	9,68	8,06	8,06	24,19	35,48	8,06
Es. 2	1,61	3,23	0,00	11,29	12,90	1,61	40,32	0,00
	6,45	16,13	8,06	12,90	3,23	1,61	14,52	16,13
Es. 3	29,03	22,58	3,23	12,90	17,74	11,29	11,29	14,52
	4,84	11,29	4,84	9,68	11,29	19,35	3,23	11,29
Es. 4	9,68	11,29	14,52	8,06	11,29	25,81	22,58	14,52
	12,90	9,68	9,68	6,45	12,90	11,29	9,68	16,13
	4,84	9,68	16,13	8,06	1,61	8,06	4,84	8,06

Tabella 3b - Percentuale di errore in ogni item delle classi di controllo

La Tabella 4a riporta la distribuzione degli errori suddivisi nelle 4 prove per singola scuola; la Tabella 4b riporta i medesimi dati relativi però alle classi di controllo. Infine la Tabella 4c raffronta il totale degli item con gli errori effettuati per ogni item e ne calcola la percentuale sia per le classi sperimentali (cifre in rosso) che per le classi di controllo (cifre in blu).

	Felinaz	Fenis	Tot	St-Vinc.	TOTALE
es 1	23	58	81	103	184
es 2	12	9	21	60	81
es 3	17	24	41	69	110
es 4	26	28	54	42	96

Tabella 4a - Distribuzione degli errori nelle 4 prove suddivisi per le classe sperimentali

	Aosta	Chatillon	TOTALE
es 1	117	116	233
es 2	33	60	93
es 3	52	71	123
es 4	130	36	166

Tabella 4b - Distribuzione degli errori nelle 4 prove suddivisi per le classe di controllo

	Item	SUB	%	Item	NO SUB	%
es 1	1824	184	10,09	1984	233	11,74
es 2	912	81	8,88	992	93	9,38
es 3	912	110	12,06	992	123	12,40
es 4	1368	96	7,02	1488	166	11,16

Tabella 4c - Rapporti tra item, errori e percentuali di errori dei due gruppi

La Tabella 5 mette a confronto le percentuali di errori totali del gruppo sperimentale e del gruppo di controllo per ogni item di ogni esercizio: in nero le richieste dei cartellini mostrati agli alunni, in rosso la percentuale di errore delle classi sperimentali e in blu la percentuale di errori delle classi di controllo.

Esercizio 1							
1+8	4+3	0+4	1+5	2+4	3+2	3+6	3+3
14,81	29,63	0,00	14,81	11,11	3,70	29,63	7,41
14,52	14,52	1,61	8,06	17,74	9,68	35,48	12,90
1+2	0+0	5+3	1+6	7+2	7+1	2+2	1+0
0,00	0,00	11,11	18,52	3,70	7,41	0,00	0,00
3,23	1,61	9,68	19,35	11,29	14,52	6,45	11,29
8+0	5+2	5+5	7+3	8+2	1+4	0+2	1+9
3,70	7,41	0,00	22,22	7,41	11,11	3,70	14,81
8,06	3,23	3,23	11,29	11,29	8,06	4,84	20,97
4+5	7+0	0+10	9+0	1+3	6+4	2+6	1+1
18,52	0,00	0,00	0,00	3,70	29,63	25,93	0,00
9,68	9,68	9,68	8,06	8,06	24,19	35,48	8,06

Esercizio 2							
5	3	0	7	8	2	10	1
0,00	0,00	0,00	3,70	3,70	0,00	33,33	0,00
1,61	3,23	0	11,29	12,90	1,61	40,32	0
4	9	6	8	5	3	9	7
0	11,11	3,70	3,70	0,00	0,00	11,11	7,41
6,45	16,13	8,06	12,90	3,23	1,61	14,52	16,13

Esercizio 3							
2+8	9+1	2+2	5+5	1+7	4+2	0+6	5+4
44,44	7,41	3,70	11,11	18,52	7,41	3,70	11,11
29,03	22,58	3,23	12,90	17,74	11,29	11,29	14,52
1+1	3+4	6+2	4+4	5+1	3+7	3+3	6+1
0,00	7,41	11,11	7,41	3,70	14,81	0,00	0,00
4,84	11,29	4,84	9,68	11,29	19,35	3,23	11,29

Esercizio 4							
0+1	3+2	2+5	2+0	1+4	4+3	5+1	2+1
3,70	11,11	7,41	0,00	0,00	22,22	7,41	0,00
9,68	11,29	14,52	8,06	11,29	25,81	22,58	14,52
4+4	1+1	3+3	0+0	2+3	5+2	4+0	3+45
7,41	3,70	0,00	3,70	22,22	3,70	14,81	11,11
12,90	9,68	9,68	6,45	12,90	11,29	9,68	16,13
0+3	5+3	4+2	2+2	5+5	5+4	5+0	3+1
3,70	22,22	29,63	3,70	7,41	3,70	7,41	3,70
4,84	9,68	16,13	8,06	1,61	8,06	4,84	8,06

Tabella 5 - Percentuali di errori in ogni item della prova

3.4.3.2. Rimodulazione del test e seconda somministrazione

Da una primissima analisi dei dati raccolti e inseriti nelle tabelle è emerso un lieve divario tra gli errori effettuati dai bambini delle classi sperimentali rispetto agli errori effettuati delle classi di controllo, in particolare questo si osserva nella Tabella 5c che riporta i dati trasformati in percentuali degli errori complessivi dei due gruppi di classi in ogni esercizio. Questa analisi ha portato le insegnanti del team di ricerca a interrogarsi sul motivo di un così leggero divario di errori tra i due gruppi, dato forse inatteso. Le insegnanti, per capire meglio la situazione hanno analizzato anche i filmati relativi alle somministrazioni delle prove per osservare quali potessero i motivi di tale risultato; da questa analisi è emerso che alcuni bambini (sia delle classi sperimentali sia di quelle di controllo) avevano ancora il tempo di contare i dots o le rappresentazioni delle dita delle mani che venivano loro mostrate, quindi il processo di *subitizing* veniva sostituito dal conteggio proprio perché il tempo prestabilito per ogni item era probabilmente eccessivo. Inoltre dalle riflessioni delle insegnanti rispetto al processo di somministrazione del test è emerso che non era possibile garantire, durante la prova, che ogni cartellino venisse mostrato esattamente per lo stesso tempo e soprattutto per il tempo prestabilito, perché non risultava semplice per gli insegnanti mostrare un cartellino dopo l'altro calcolando esattamente il tempo di esposizione di ognuno.

Per verificare davvero l'ipotesi di partenza alla luce di queste criticità emerse durante la prima somministrazione, il gruppo di ricerca ha deciso di modificare ulteriormente le modalità di somministrazione elaborando una versione digitale del test: un PowerPoint²⁹ con l'inserimento di effetti sonori alla fine del tempo prestabilito e quindi al cambio della slide che mostravano la carta da riconoscere; un ulteriore effetto sonoro diverso dal precedente inoltre scandiva

²⁹ Vedere cartella Test Subitizing nel CD allegato alla tesi.

il cambio di riga all'interno della griglia, in modo che i bambini andassero a capo in modo corretto.

La variabile “tempo di somministrazione” risulta essenziale per validare il riconoscimento delle quantità come impresse nel ricordo visivo e non come processo di conta. Inoltre il test vuole indagare se, attraverso la prova di somministrazione delle coppie di carte dove si richiede la somma, il processo di recupero dalla memoria di fatti aritmetici avviene tramite codice visivo non verbale e non tramite codice verbale.

Dopo la modifica del test, il team di ricerca ha concordato di effettuare nuovamente una somministrazione in una “classe prova”, sempre con l'obiettivo di verificare l'attendibilità del test. A seguito dei buoni risultati, rispetto alle modalità e ai tempi dello svolgimento delle prove ottenuti dalla somministrazione nella “classe prova”, si è deciso di procedere con la seconda somministrazione in tutte le classi coinvolte del progetto.

Il materiale del test è stato messo a disposizione delle insegnanti su *Google Drive* e attraverso la posta elettronica per le insegnanti delle classi di controllo.

Le insegnanti hanno così effettuato la seconda somministrazione del test nelle classi. I dati raccolti sono stati, nuovamente, disposti in tabelle così da poter essere analizzati e confrontati con maggiore chiarezza; anche in questa occasione, per permettere una lettura più chiara dei dati, sono stati riportati in rosso i dati che si riferiscono alle classi sperimentali e in blu quelli delle classi di controllo.

La Tabella 6a indica per ogni item il numero degli errori commessi, il totale degli errori per ogni esercizio e il totale degli errori della prova; la Tabella 6b indica la percentuale di errore in ogni item della prova.

Errori per ogni item classi sperimentali									Errori	Tot.	
Es. 1	2	3	3	0	2	3	6	3	22	57	221
	0	0	2	1	2	0	1	2	8		
	2	0	1	3	1	0	2	2	11		
	4	0	2	0	1	1	7	1	16		
Es. 2	1	2	2	5	7	1	8	2	28	46	
	0	3	1	1	3	1	5	4	18		
Es. 3	9	4	1	4	4	5	3	8	38	62	
	2	4	3	0	3	9	1	2	24		
Es. 4	2	2	6	0	3	3	2	2	20	56	
	5	0	1	1	2	1	1	10	21		
	3	4	7	1	0	0	0	0	15		

Tabella 6a - Errori commessi dagli alunni delle classi sperimentali

Percentuale di errore in ogni item									
Es. 1	3,64	5,45	5,45	0,00	3,64	5,45	10,91	5,45	
	0,00	0,00	3,64	1,82	3,64	0,00	1,82	3,64	
	3,64	0,00	1,82	5,45	1,82	0,00	3,64	3,64	
	7,27	0,00	3,64	0,00	1,82	1,82	12,73	1,82	
Es. 2	1,82	3,64	3,64	9,09	12,73	1,82	14,55	3,64	
	0,00	5,45	1,82	1,82	5,45	1,82	9,09	7,27	
Es. 3	16,36	7,27	1,82	7,27	7,27	9,09	5,45	14,55	
	3,64	7,27	5,45	0,00	5,45	16,36	1,82	3,64	
Es. 4	3,64	3,64	10,91	0,00	5,45	5,45	3,64	3,64	
	9,09	0,00	1,82	1,82	3,64	1,82	1,82	18,18	
	5,45	7,27	12,73	1,82	0,00	0,00	0,00	0,00	

Tabella 6b - Percentuale di errore in ogni item delle classi sperimentali

La Tabella 7a indica per ogni item il numero degli errori commessi, il totale degli errori per ogni esercizio e il totale degli errori della prova; la Tabella 7b indica la percentuale di errore in ogni item della prova.

Errori per ogni item									Errori Tot		
Es. 1	6	12	3	5	6	7	20	6	65	243	609
	8	3	7	12	5	8	5	11	59		
	8	4	2	7	8	5	6	7	47		
	17	6	6	5	3	18	11	6	72		
Es. 2	2	0	0	6	5	1	7	1	22	50	
	2	7	0	4	2	2	8	3	28		
Es. 3	28	16	5	7	13	7	3	17	96	167	
	9	14	12	6	6	14	5	5	71		
Es. 4	16	9	5	4	9	13	6	5	67	149	
	9	0	2	1	2	1	5	8	28		
	9	11	13	2	2	4	4	9	54		

Tabella 7a - Errori prove commessi dagli alunni delle classi di controllo

Es. 1	10,34	20,69	5,17	8,62	10,34	12,07	34,48	10,34
	13,79	5,17	12,07	20,69	8,62	13,79	8,62	18,97
	13,79	6,90	3,45	12,07	13,79	8,62	10,34	12,07
	29,31	10,34	10,34	8,62	5,17	31,03	18,97	10,34
Es. 2	3,45	0,00	0,00	10,34	8,62	1,72	12,07	1,72
	3,45	12,07	0,00	6,90	3,45	3,45	13,79	5,17
Es. 3	48,28	27,59	8,62	12,07	22,41	12,07	5,17	29,31
	15,52	24,14	20,69	10,34	10,34	24,14	8,62	8,62
Es. 4	27,59	15,52	8,62	6,90	15,52	22,41	10,34	8,62
	15,52	0,00	3,45	1,72	3,45	1,72	8,62	13,79
	15,52	18,97	22,41	3,45	3,45	6,90	6,90	15,52

Tabella 7b - Percentuale di errore in ogni item delle classi di controllo

La Tabella 8a analizza i dati relativi agli errori in ogni item degli esercizi proposti delle classi sperimentali; la Tabella 8b quelli delle classi di controllo nella; e Tabella 8c raffronta il totale degli item con gli errori effettuati per ogni item e ne calcola la percentuale sia per le classi sperimentali che per le classi di controllo.

	Felinaz	Fenis	St-Vinc.	TOTALE
es 1	2	11	44	57
es 2	3	8	35	46
es 3	1	21	40	62
es 4	4	8	44	56

Tabella 8a - Distribuzione degli errori nelle 4 prove suddivisi per le classe sperimentali

	Aosta	Chatillon	TOTALE
es 1	195	48	243
es 2	29	21	50
es 3	136	30	166
es 4	109	40	149

Tabella 8b - Distribuzione degli errori nelle 4 prove suddivisi per le classe di controllo

	Item	SUB	%	Item	NO SUB	%
es 1	1760	57	3,24	1856	243	13,09
es 2	880	46	5,23	928	50	5,39
es 3	880	62	7,05	928	166	17,89
es 4	1320	56	4,24	1392	149	10,70

Tabella 8c - Rapporti tra item, errori e percentuali di errori dei due gruppi

La Tabella 9 mette a confronto le percentuali di errori totali del gruppo sperimentale e del gruppo di controllo per ogni item di ogni esercizio: in nero le richieste dei cartellini mostrati agli alunni, in rosso la percentuale di errore delle classi sperimentali e in blu la percentuale di errori delle classi di controllo.

Esercizio 1							
1+8	4+3	0+4	1+5	2+4	3+2	3+6	3+3
3,64	5,45	5,45	0,00	3,64	5,45	10,91	5,45
10,34	20,69	5,17	8,62	10,34	12,07	34,48	10,34
1+2	0+0	5+3	1+6	7+2	7+1	2+2	1+0
0,00	0,00	3,64	1,82	3,64	0,00	1,82	3,64
13,79	5,17	12,07	20,69	8,62	13,79	8,62	18,97
8+0	5+2	5+5	7+3	8+2	1+4	0+2	1+9
3,64	0,00	1,82	5,45	1,82	0,00	3,64	3,64
13,79	6,90	3,45	12,07	13,79	8,62	10,34	12,07
4+5	7+0	0+10	9+0	1+3	6+4	2+6	1+1
7,27	0,00	3,64	0,00	1,82	1,82	12,73	1,82
29,31	10,34	10,34	8,62	5,17	31,03	18,97	10,34

Esercizio 2							
5	3	0	7	8	2	10	1
1,82	3,64	3,64	9,09	12,73	1,82	14,55	3,64
3,45	3,23	0	11,29	12,90	1,61	40,32	0
4	9	6	8	5	3	9	7
0,00	5,45	1,82	1,82	5,45	1,82	9,09	7,27
3,45	16,13	8,06	12,90	3,23	1,61	14,52	16,13

Esercizio 3							
2+8	9+1	2+2	5+5	1+7	4+2	0+6	5+4
16,36	7,27	1,82	7,27	7,27	9,09	5,45	14,55
48,28	27,59	8,62	12,07	22,41	12,07	5,17	29,31
1+1	3+4	6+2	4+4	5+1	3+7	3+3	6+1
3,64	7,27	5,45	0,00	5,45	16,36	1,82	3,64
15,52	24,14	20,69	10,34	10,34	24,14	8,62	8,62

Esercizio 4							
0+1	3+2	2+5	2+0	1+4	4+3	5+1	2+1
3,64	3,64	10,91	0,00	5,45	5,45	3,64	3,64
27,59	15,52	8,62	6,90	15,52	22,41	10,34	8,62
4+4	1+1	3+3	0+0	2+3	5+2	4+0	3+45
9,09	0,00	1,82	1,82	3,64	1,82	1,82	18,18
15,52	0,00	3,45	1,72	3,45	1,72	8,62	13,79
0+3	5+3	4+2	2+2	5+5	5+4	5+0	3+1
5,45	7,27	12,73	1,82	0,00	0,00	0,00	0,00
15,52	18,97	22,41	3,45	3,45	6,90	6,90	15,52

Tabella 9 - Percentuali di errori in ogni item della prova

3.4.4 Fase 4 – Analisi dei dati raccolti

Durata: dicembre 2014 a febbraio 2015

Le tabelle riportate nel paragrafo precedente riassumono i dati raccolti della prima e della seconda somministrazione del test e sono organizzate in modo tale da permettere il confronto tra il gruppo delle classi sperimentali (cifre in rosso) e il gruppo delle classi di controllo (cifre in blu).

Come si può notare dal Grafico 1, una volta rimodulato il test di valutazione, la percentuale di errori delle classi di controllo risulta più alta rispetto alle classi sperimentali.

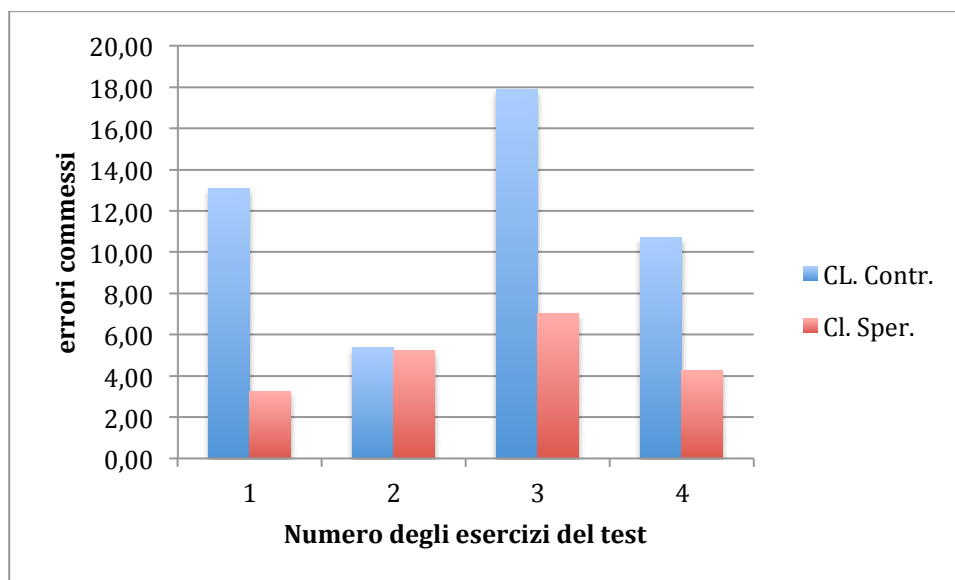


Grafico 1 - Percentuale di errore dei due gruppi per ogni esercizio del test.

In particolare se analizziamo i dati della Tabella 8c che viene riportata di seguito: nell'esercizio 1, che richiedeva di riportare la somma di due quantità rappresentate in codice arabico, la percentuale di errore è più alta di quasi 10 punti percentuali (9,85%); nell'esercizio 2, che richiedeva di riconoscere le carte con quantità rappresentate con i dots, la percentuale di errore delle classi

di controllo è di poco superiore a quella delle classi sperimentali (0,16%); nell'esercizio 3, che richiedeva di sommare le carte che contenevano due quantità rappresentate con i dots, la percentuale di errore delle classi di controllo è superiore ai 10 punti percentuali rispetto alle classi sperimentali (10,84%); infine, nell'esercizio 4, che richiedeva la somma di due carte che mostravano due quantità rappresentate dalle dita della mano, la percentuale di errore della classe di controllo è maggiore di 6,46 punti percentuali rispetto alle altre classi.

	Item	SUB	%	Item	NO SUB	%
es 1	1760	57	3,24	1856	243	13,09
es 2	880	46	5,23	928	50	5,39
es 3	880	62	7,05	928	166	17,89
es 4	1320	56	4,24	1392	149	10,70

Tabella 8c - Rapporti tra item, errori e percentuali di errori dei due gruppi

Osservando ancora la tabella è possibile rilevare che il divario più significativo riguarda, come abbiamo già evidenziato poco sopra, le percentuali di errori dei due gruppi nell'esercizio 1, che risulta essere quello in cui i bambini delle classi sperimentali hanno effettuato la migliore prestazione. Tale esercizio (Tabella 9a) che riguardava delle normali somme con due addendi, con la tipologia di rappresentazione più familiare anche ai bambini che non avevano svolto attività di potenziamento del *subitizing*, era però quello che richiedeva il calcolo mentale rapido che dai dati raccolti sembra essere stato potenziato dalle attività sperimentali svolte.

Esercizio 1							
1+8	4+3	0+4	1+5	2+4	3+2	3+6	3+3
3,64	5,45	5,45	0,00	3,64	5,45	10,91	5,45
10,34	20,69	5,17	8,62	10,34	12,07	34,48	10,34
1+2	0+0	5+3	1+6	7+2	7+1	2+2	1+0
0,00	0,00	3,64	1,82	3,64	0,00	1,82	3,64
13,79	5,17	12,07	20,69	8,62	13,79	8,62	18,97
8+0	5+2	5+5	7+3	8+2	1+4	0+2	1+9
3,64	0,00	1,82	5,45	1,82	0,00	3,64	3,64
13,79	6,90	3,45	12,07	13,79	8,62	10,34	12,07
4+5	7+0	0+10	9+0	1+3	6+4	2+6	1+1
7,27	0,00	3,64	0,00	1,82	1,82	12,73	1,82
29,31	10,34	10,34	8,62	5,17	31,03	18,97	10,34

Tabella 9a – Dettaglio della percentuali di errori nell'esercizio 1

Nell'esercizio 2 (Tabella 9b) le prestazioni delle classi sperimentali e quelle delle classi di controllo risultano molto simili. I maggiori divari di prestazione si rilevano negli item che richiedevano di riconoscere le carte con 8 e 9 dots, tranne in un caso in cui la prestazione risulta essere sostanzialmente la stessa (12,73% e 12,90%).

Esercizio 2							
5	3	0	7	8	2	9	1
1,82	3,64	3,64	9,09	12,73	1,82	14,55	3,64
3,45	3,23	0	11,29	12,90	1,61	40,32	0
4	9	6	8	5	3	9	7
0,00	5,45	1,82	1,82	5,45	1,82	9,09	7,27
3,45	16,13	8,06	12,90	3,23	1,61	14,52	16,13

Tabella 9b - Dettaglio della percentuali di errori nell'esercizio 2

L'esercizio 3 (Tabella 9c) è quello in cui notiamo le prestazioni peggiori per quanto riguarda sia il gruppo delle classi di controllo (17,89 %) sia quello delle classi sperimentali (7,05%). In questo esercizio solo in un item, quello che richiedeva di effettuare la somma 0+6, la percentuale dei due gruppi è simile per tutti gli altri vi è un notevole divario delle percentuali di errore.

Esercizio 3							
2+8	9+1	2+2	5+5	1+7	4+2	0+6	5+4
16,36	7,27	1,82	7,27	7,27	9,09	5,45	14,55
48,28	27,59	8,62	12,07	22,41	12,07	5,17	29,31
1+1	3+4	6+2	4+4	5+1	3+7	3+3	6+1
3,64	7,27	5,45	0,00	5,45	16,36	1,82	3,64
15,52	24,14	20,69	10,34	10,34	24,14	8,62	8,62

Tabella 9c - Dettaglio della percentuali di errori nell'esercizio 3.

E infine nell'esercizio 4 (Tabella 9d) dalla lettura delle percentuali di errori possiamo notare che vi è l'unico item di tutta la prova in cui la percentuale di errore è pari a 0 per entrambi i gruppi (1+1) e altri due item (0+0, 5+2) in cui la percentuale di errore varia di poco da un gruppo all'altro.

Esercizio 4							
0+1	3+2	2+5	2+0	1+4	4+3	5+1	2+1
3,64	3,64	10,91	0,00	5,45	5,45	3,64	3,64
27,59	15,52	8,62	6,90	15,52	22,41	10,34	8,62
4+4	1+1	3+3	0+0	2+3	5+2	4+0	3+4
9,09	0,00	1,82	1,82	3,64	1,82	1,82	18,18
15,52	0,00	3,45	1,72	3,45	1,72	8,62	13,79
0+4	5+4	4+2	2+2	5+5	5+4	5+0	3+1
5,45	7,27	12,73	1,82	0,00	0,00	0,00	0,00
15,52	18,97	22,41	3,45	3,45	6,90	6,90	15,52

Tabella 9d - Dettaglio della percentuali di errori nell'esercizio 3.

Dall'analisi della precedenti tabelle (Tabelle 9a, 9b, 9c e 9d), che riportano nel dettaglio la percentuale di errori per ogni item del test, è possibile notare che vi sono solo tre item nei quali i bambini delle classi di controllo non hanno fatto errori: due relativi all'esercizio numero 2, quello che in generale ha evidenziato una lieve differenza nelle percentuali di errori dei due gruppi di classi esaminate, in particolare l'item che richiedeva di riconoscere la carta con 0 dots e quella che mostrava 1 solo dots; uno relativo all'esercizio numero 4, relativo all'item in cui bisognava effettuare la somma 1+1 questo si spiega. Riprendendo le teorie di Butterworth (1999) la capacità di riconoscere rapidamente una quantità, *subitizing*, è un abilità innata che dipende dal *modulo numerico* il quale consente di riconoscere e distinguere le numerosità di insiemi che contengono fino a 3 elementi.

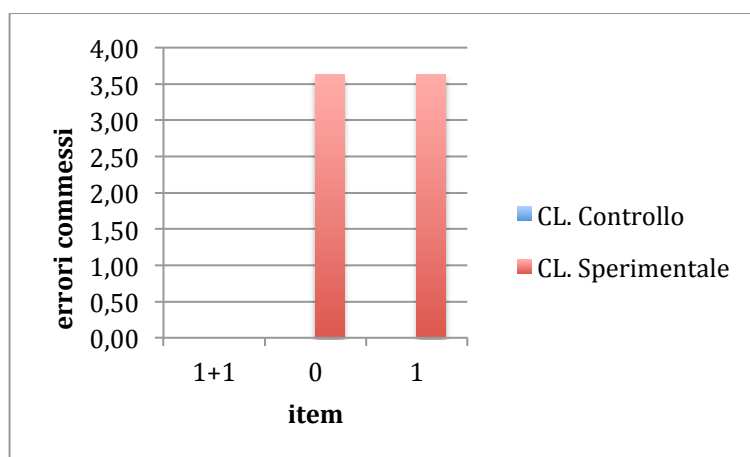


Grafico 2 - Rappresentazione degli item in cui le classi di controllo non hanno commesso errori.

Sono in totale sedici gli item nei quali la percentuale di errore delle classi sperimentali è pari a 0 (Grafico 3): otto relativi all'esercizio 1, che sono quelli corrispondenti alle operazioni 1+5, 1+2, 0+0, 7+1, 5+2, 1+4, 7+0, 9+0; uno relativo all'esercizio 2, quello che richiedeva di riconoscere la carta con 4 dots; uno relativo all'esercizio 3, l'item che richiedeva di fare la somma di due carte che mostravano 4 dots; sei relativi all'esercizio 4, in particolare relativi agli item che richiedevano di eseguire le somme 2+0, 1+1, 5+5, 5+4, 5+0, 3+1.

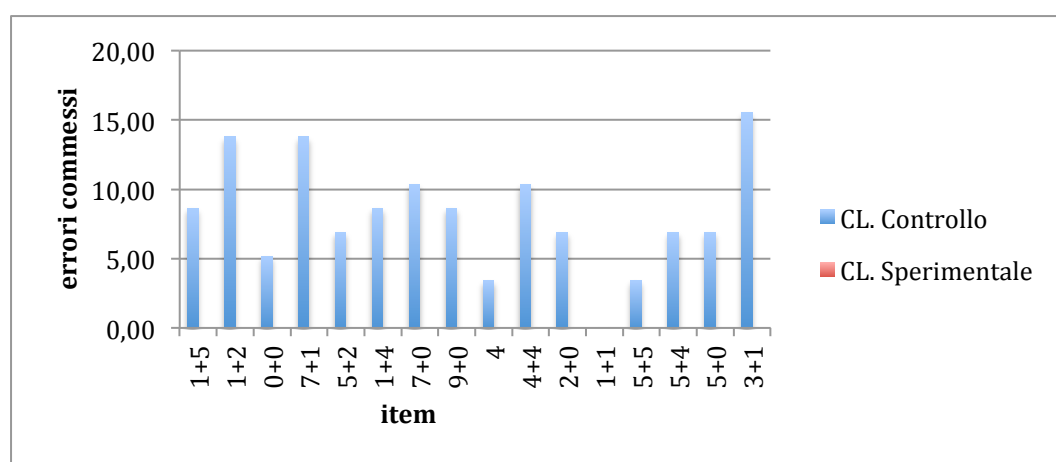


Grafico 3 - Rappresentazione degli item in cui le classi sperimentali non hanno commesso errori.

Le maggiori differenze delle percentuali di errori delle classi di controllo rispetto alle classi sperimentali riguardano tredici item (Grafico 4): sei nell'esercizio 1, quelli relativi alle somme 4+3, 3+6, 1+6, 1+0, 4+5, 6+4; uno nell'esercizio 2, quello che richiedeva di riconoscere la carta con 9 dots; quattro nell'esercizio 3, quelli che richiedevano di sommare le carte con dots 2+8, 9+1, 3+4, 6+2; due nell'esercizio 4, quelli in cui i bambini dovevano sommare 0+1 e 4+3.

I risultati riportati nel Grafico 3 e nel Grafico 4, relativi ad una migliore prestazione dei bambini delle classi sperimentali rispetto a quelle dei bambini delle classi di controllo possono essere interpretati come il fatto che le classi sperimentali, grazie all'allenamento costante e alle attività di potenziamento del calcolo svolte, abbiano utilizzato la strategia del *know fact* (Carpenter e Moser, 1982), secondo la quale i bambini danno la risposta direttamente, senza

contare, recuperando conoscenze fattuali della memoria, nel caso specifico i fatti aritmetici, questo spiegherebbe sia la correttezza delle risposte sia la loro rapidità. Anche Baroody (1983) evidenzia come nelle procedure di calcolo si passi da processi lenti di conteggio all'uso di regole applicate in modo automatico, le regole procedurali vengono quindi generalizzate, fatto che risulta essere cognitivamente più economico rispetto alla memorizzazione di ogni singola operazione. La strategia utilizzata dai bambini delle classi sperimentali durante il test potrebbe essere, dunque, quella del recupero mnemonico dei fatti aritmetici. Questo porta a pensare che il lavoro sperimentale svolto abbia agito sulle scelte delle strategie determinando un impatto positivo sul criterio interno del “livello di fiducia” rispetto a questo tipo di compito (Siegler e Mitchell, 1982) e che sia possibile stimolare l'acquisizione dei fatti aritmetici attraverso l'uso di attività e artefatti, che utilizzando rappresentazioni di tipo simbolico e analogico, sfruttano il canale visivo non verbale. Tale canale permette l'accesso diretto ai fatti aritmetici acquisiti, ciò spiegherebbe la correttezza delle risposte degli alunni delle classi sperimentali, che come mostra il Grafico 4, risultano essere sempre al disotto della soglia dei 17 punti percentuali e nella maggior parte dei casi al disotto dei 5 punti percentuali.

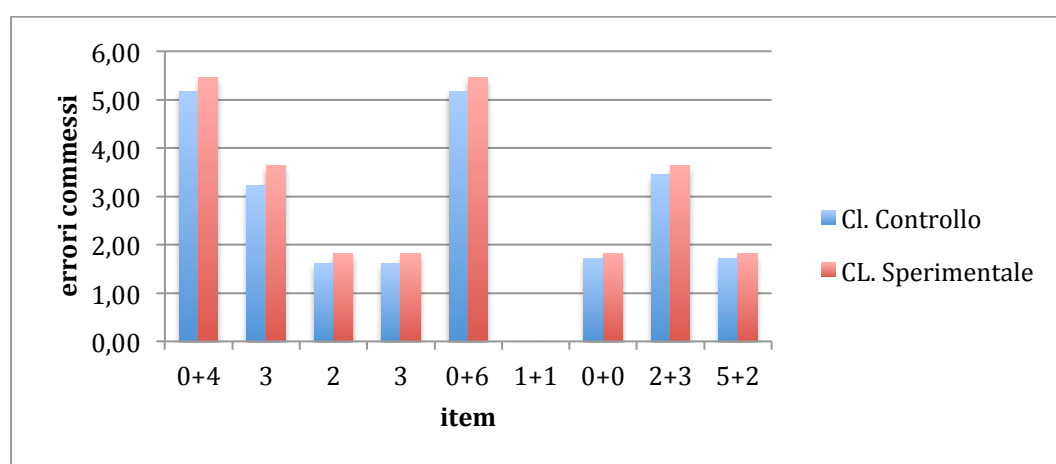


Grafico 4- Rappresentazione degli item in cui vi è una maggiore differenza di prestazione tra i due gruppi.

La percentuale di errori varia di poco da un gruppo all'altro in nove item: uno nell'esercizio 1 (0+4); tre nell'esercizio 2 (3, 2, 3); uno nell'esercizio 3 (0+6); quattro nell'esercizio 5 (1+1, 0+0, 2+3, 5+2) questi dati possono essere analizzati attingendo ancora una volta alle teorie di Butterworth (1999) secondo il quale il *subitizing* è un'abilità innata che consente di riconoscere e distinguere le numerosità di insiemi che contengono fino a 3 elementi. Tale abilità, essendo innata, appartiene indistintamente sia ai bambini delle classi sperimentali sia a quelli delle classi di controllo questo spiegherebbe la prestazione simile dei due gruppi mostrate nel Grafico 5 che riporta gli item nei quali è sempre presente una cifra al di sotto della quantità 4.

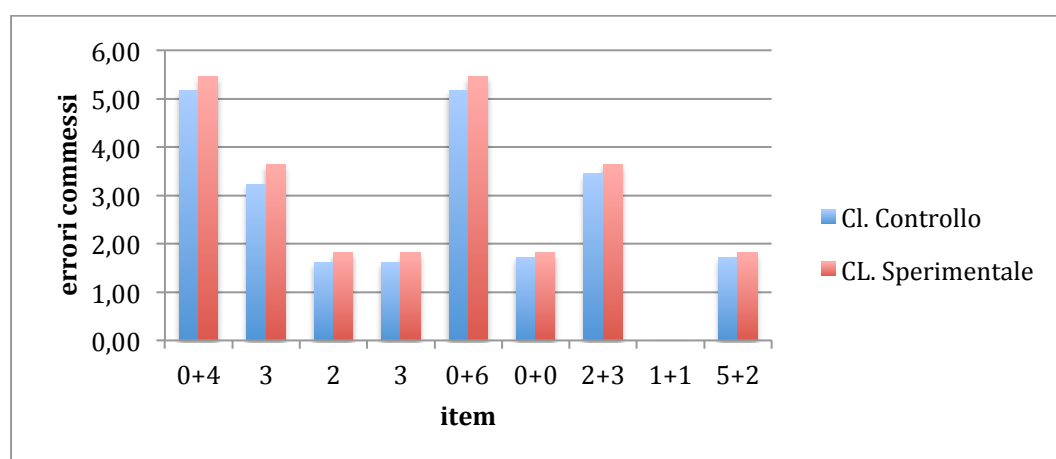


Grafico 5- Rappresentazione degli item in cui vi è una minore differenza di prestazione tra i due gruppi.

CONCLUSIONI

Il presente lavoro di sperimentazione come premesso nell'introduzione nasce dalla consultazione delle Indicazioni Nazionali e delle Prove INVALSI che sottolineano il ruolo cruciale della matematica nel percorso formativo degli alunni. All'interno di quest'ambito il mio interesse si è focalizzato in particolare sulle abilità di calcolo mentale e sulle strategie che lo supportano.

In primo luogo ho indagato, quale fosse lo spazio ad esso dedicato nelle Indicazioni Nazionali, nelle prove INVALSI e nella prassi didattica.

In secondo luogo, ho rivolto la mia attenzione alla letteratura e agli autori che si sono occupati dei processi di acquisizione dei numeri e del calcolo mentale e alle abilità innate che sono alla base di questi ultimi. In particolare la mia attenzione si è focalizzata sul *subitizing*, sulle teorie che tentano di spiegarlo e sulla possibilità di potenziarlo.

In fine ho partecipato attivamente al progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace*, in particolare al lavoro del gruppo *Numeri e conta*, da cui ha preso vita il mio progetto di ricerca, denominato *Dal subitizing ai fatti aritmetici*, che si è strutturato sulla metodologia della ricerca-azione, in quanto, metodologia più adatta al tipo di sperimentazione che intendevo effettuare.

Il potenziamento del calcolo mentale alla scuola primaria è una necessità espressa dalle Indicazioni Nazionali per il Curricolo ma anche dai risultati di indagini nazionali come le prove INVALSI. Tali risultati mettono in evidenza la necessità di dare ampio spazio al calcolo mentale innovando l'approccio didattico.

L'ipotesi di ricerca della presente tesi si sviluppa per rispondere a tale necessità e vede l'utilizzo precoce di specifiche attività didattiche come mezzo per facilitare e implementare l'acquisizione dei fatti aritmetici funzionali al potenziamento del calcolo mentale.

Gli obiettivi che la ricerca ha perseguito a questo fine riguardavano la progettazione di attività didattiche specifiche che miravano ad implementare la

capacità di *subitizing* e l'acquisizione dei fatti aritmetici e la progettazione degli artefatti utilizzati dagli alunni durante le attività didattiche proposte alle classi. Questi materiali sono state ideate partendo dall'analisi delle teorie riguardanti lo sviluppo della conoscenza numerica e delle abilità di calcolo, le abilità di conteggio, lo sviluppo delle abilità di calcolo e il calcolo. La ricerca voleva indagare inoltre se le attività e gli artefatti ideati permettevano di rispondere ai criteri di ricerca azione che costituisce la base teorica e metodologica della tesi. Per valutare l'efficacia del lavoro svolto è stato creato appositamente uno strumento che è stato chiamato test di valutazione.

Da quanto emerso durante la sperimentazione si può dire che i bambini, se adeguatamente sollecitati, possono potenziare la loro capacità innata di fare *subitizing* e di acquisire i *fatti aritmetici*. I materiali, le attività proposte e le metodologie hanno costituito lo strumento privilegiato che ha consentito tale apprendimento.

Sulla base dei risultati ottenuti ho potuto dimostrare che le classi sperimentali hanno compiuto un minor numero di errori nelle prove rispetto alle classi di controllo, di conseguenza risulta che la sperimentazione è stata efficace.

Nell'ultimo incontro del team di ricerca, è emerso che il lavoro svolto nelle classi è stato particolarmente valido soprattutto con i bambini che potevano essere individuati come potenziali soggetti con difficoltà in matematica, anche in base al passaggio di informazioni avvenuto tra le insegnanti della scuola primaria e quelle della scuola dell'infanzia, basato sui risultati delle prove BIN, sottoposte agli alunni durante l'ultimo anno della scuola dell'infanzia. In particolare questi bambini si sono dimostrati motivati all'apprendimento della matematica e coinvolti delle attività proposte. Inoltre, le insegnanti hanno riportato che il lavoro svolto ha evidenziato notevoli capacità nei bambini di inventare strategie mentali efficaci per ricordare le varie rappresentazioni delle quantità e riflettere sulle conoscenze acquisite.

La motivazione ad apprendere ha svolto un ruolo cruciale nell'intero percorso sperimentale. A questo scopo hanno avuto un ruolo centrale le insegnanti, che si sono impegnate a predisporre situazioni di apprendimento coinvolgenti,

capaci di destare interesse e desiderio di ampliare le proprie conoscenze. Le insegnanti, grazie anche alla continua formazione e alla condivisione delle esperienze effettuate, si sono appropriate di strumenti teorici che hanno permesso loro di sostenere i bambini durante il percorso e di apportare modifiche in itinere alle attività da svolgere in modo da supportare il processo di apprendimento degli alunni durante ogni tappa della sperimentazione.

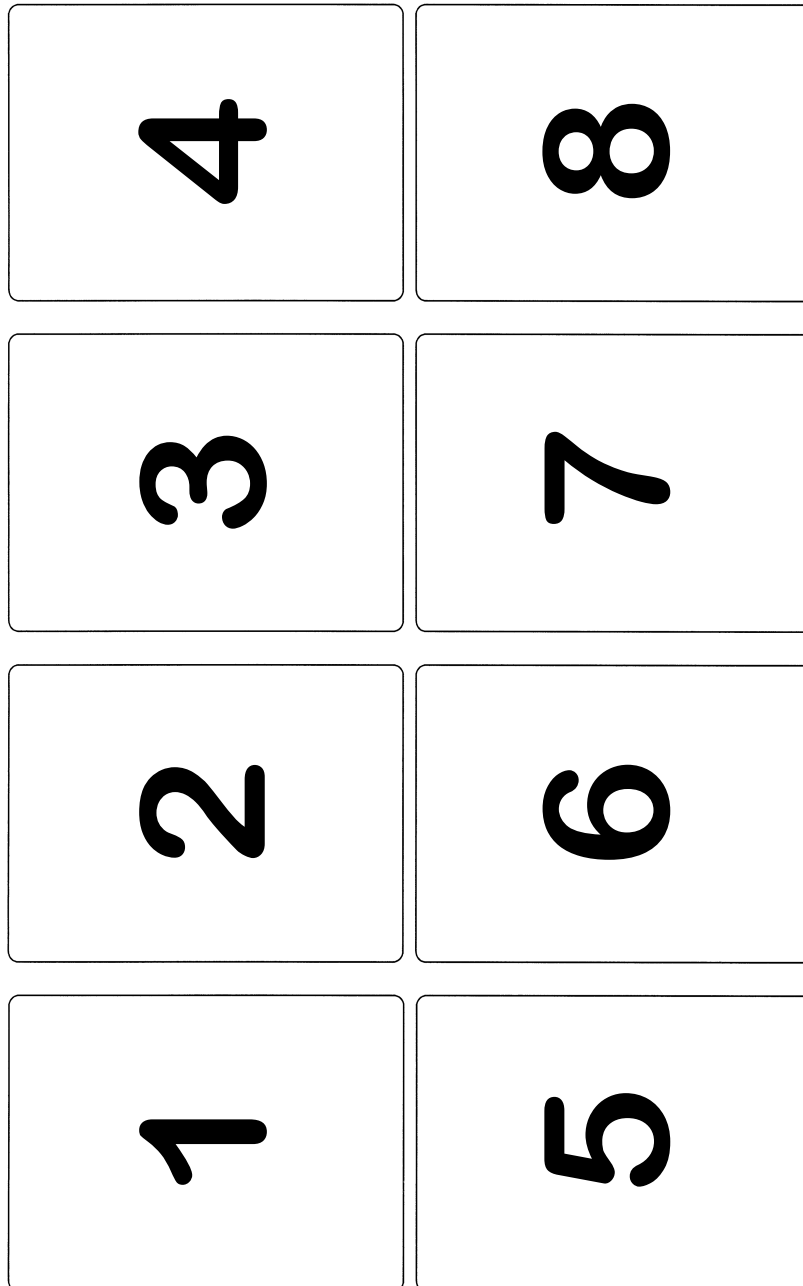
Per i bambini è stato molto importante poter apprendere in un contesto motivante e in un buon clima di lavoro. Ciò ha permesso loro di sentirsi a proprio agio, protagonisti attivi del processo di apprendimento, soggetti competenti e desiderosi di conoscere.

Ritengo, inoltre, che un approccio idoneo, in termini di metodologia didattica risulti fondamentale affinché si formi nel bambino un atteggiamento favorevole nei confronti della matematica. Soprattutto nella scuola primaria la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi, motivanti, che stimolino la curiosità e gli interessi dei bambini, al fine di non fare apparire i numeri concetti astratti e sterili, poco utili e lontani dalla realtà extrascolastica.

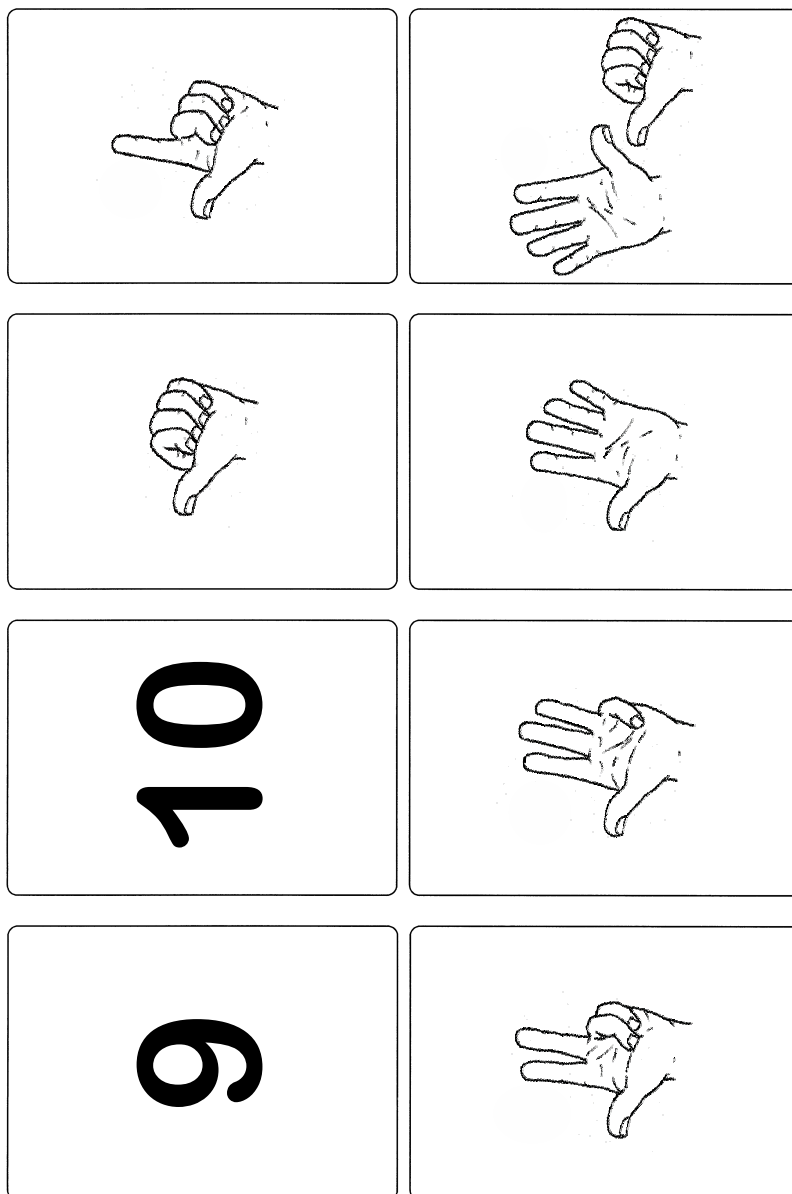
Per concludere non posso non evidenziare la mia soddisfazione rispetto al lavoro svolto e sottolineare che la validità di questo progetto sperimentale non si esaurisce nei risultati immediati riscontrati, ma come essa possa essere significativa in un arco di temporale prolungato. Tengo a precisare, infine, che il progetto *Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace* è solo all'inizio del suo percorso e, con esso, il lavoro di ricerca che sta interessando diversi gruppi di insegnanti di matematica della scuola dell'Infanzia e Primaria della Valle d'Aosta. Ritengo questo un aspetto decisamente rilevante che proietta l'insegnamento della matematica valdostana verso nuove prospettive didattiche.

ALLEGATI

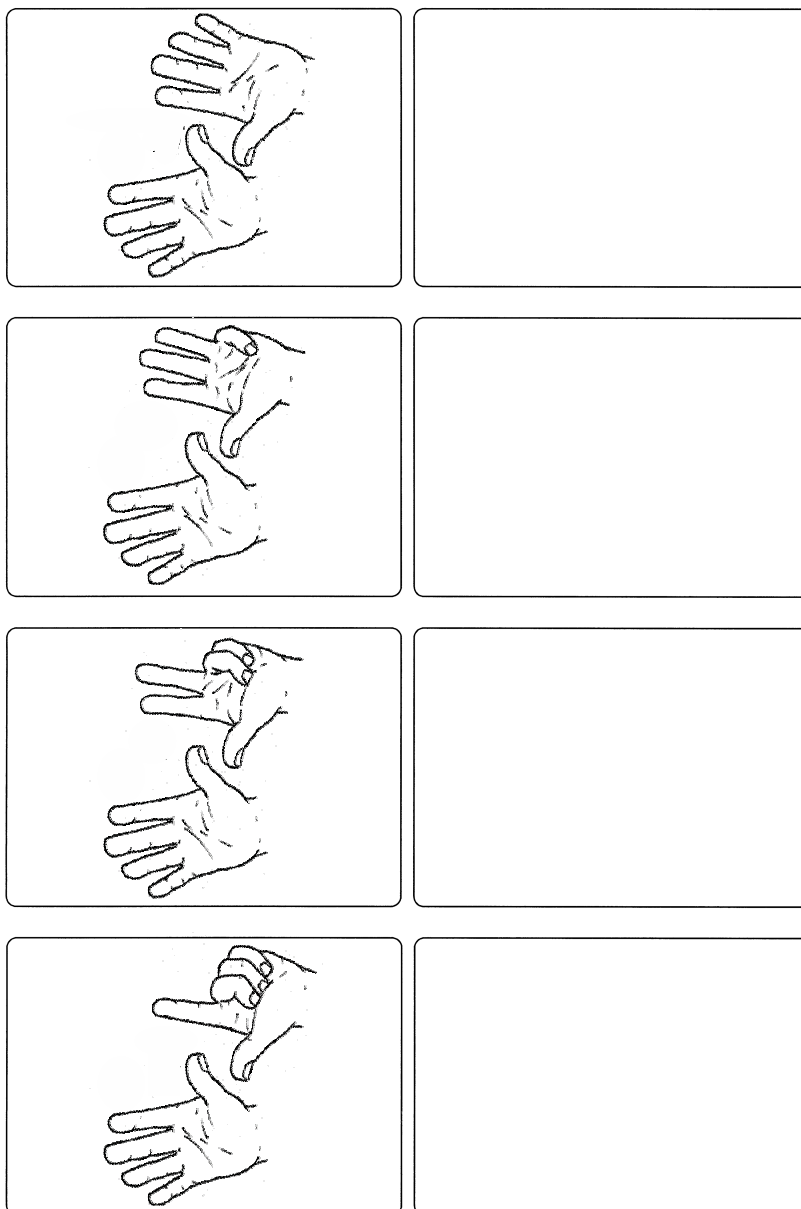
Allegato 1



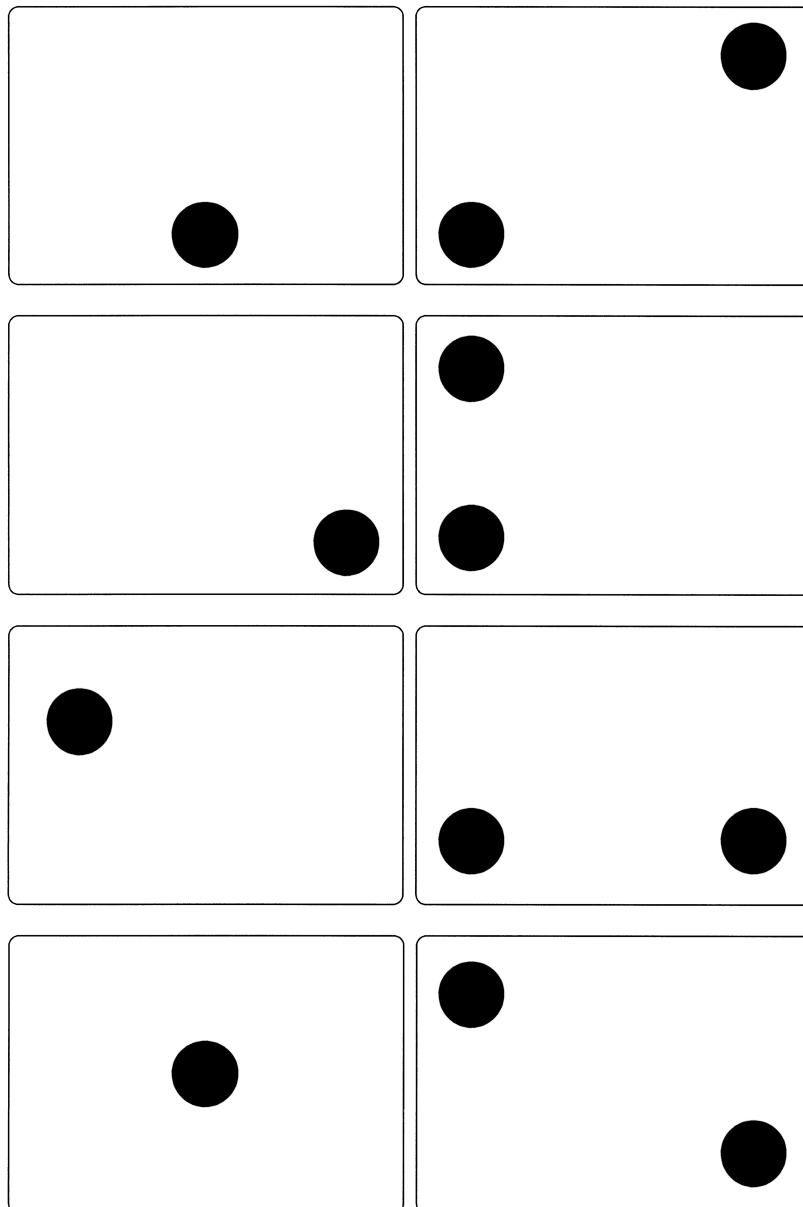
Allegato 2



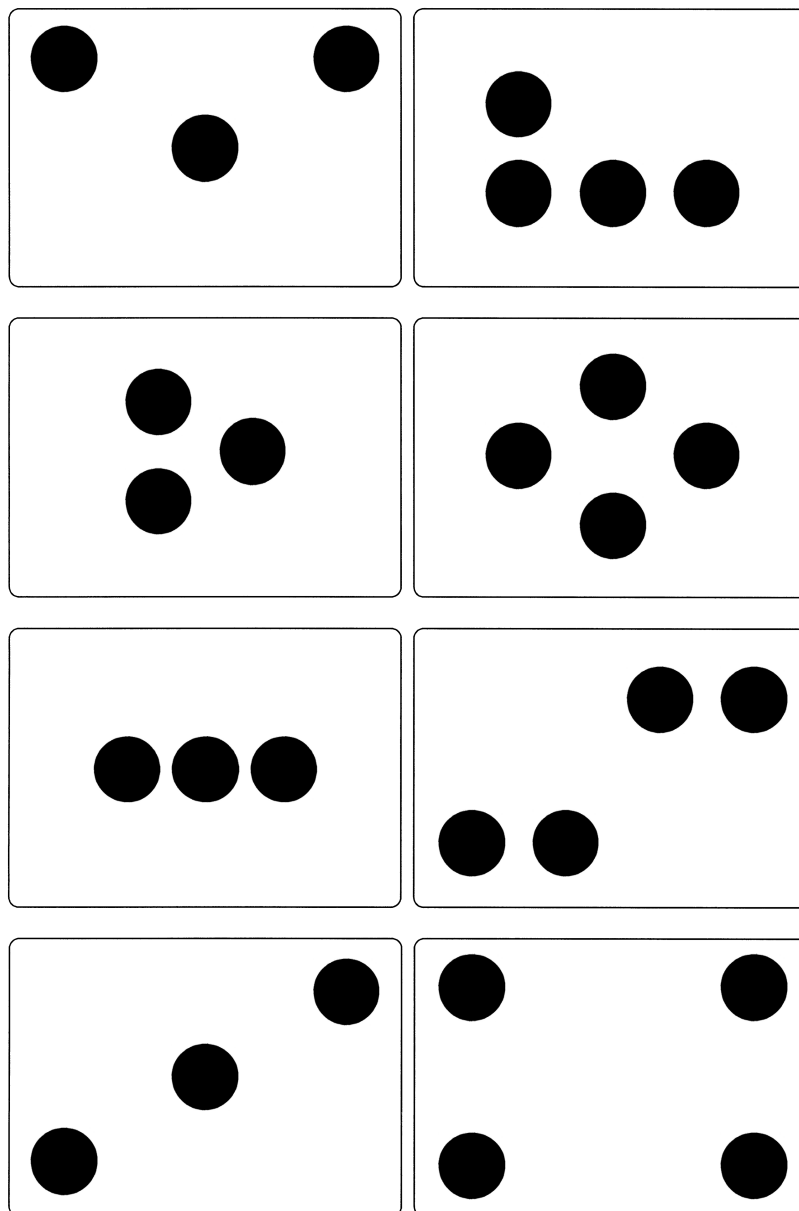
Allegato 3



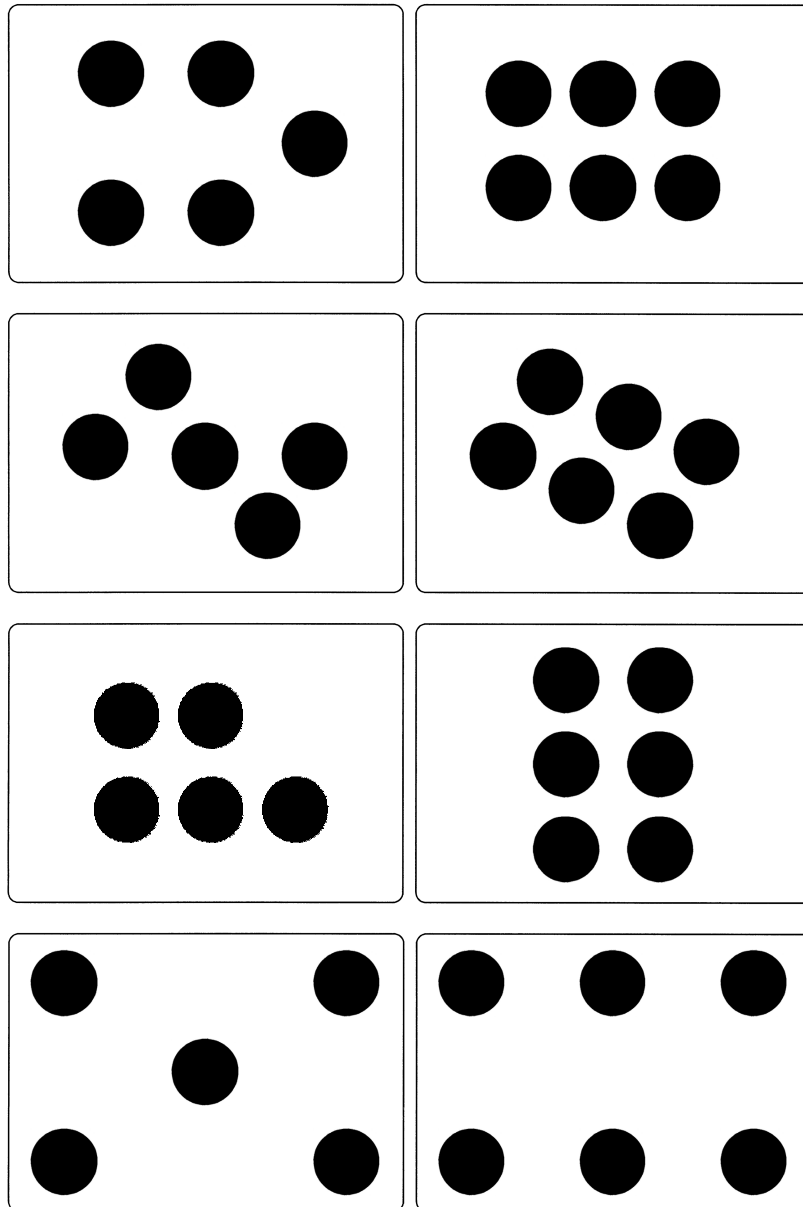
Allegato 4



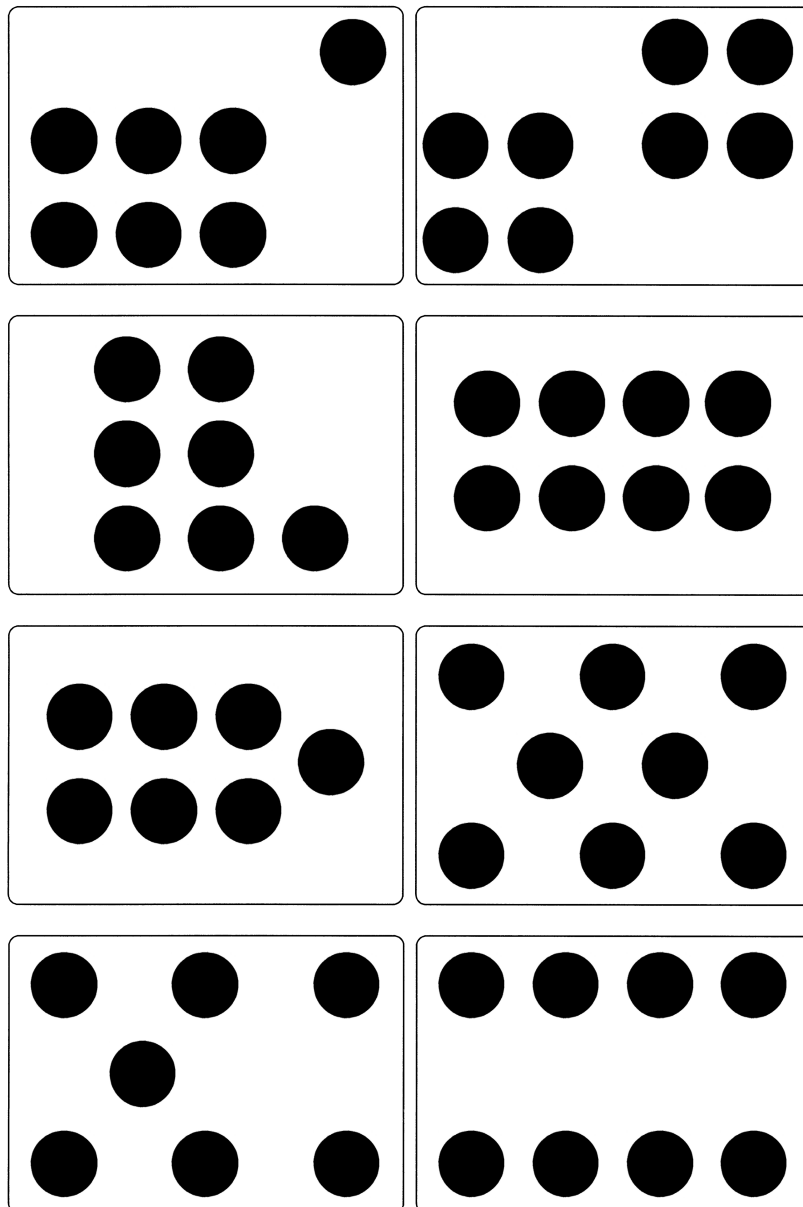
Allegato 5



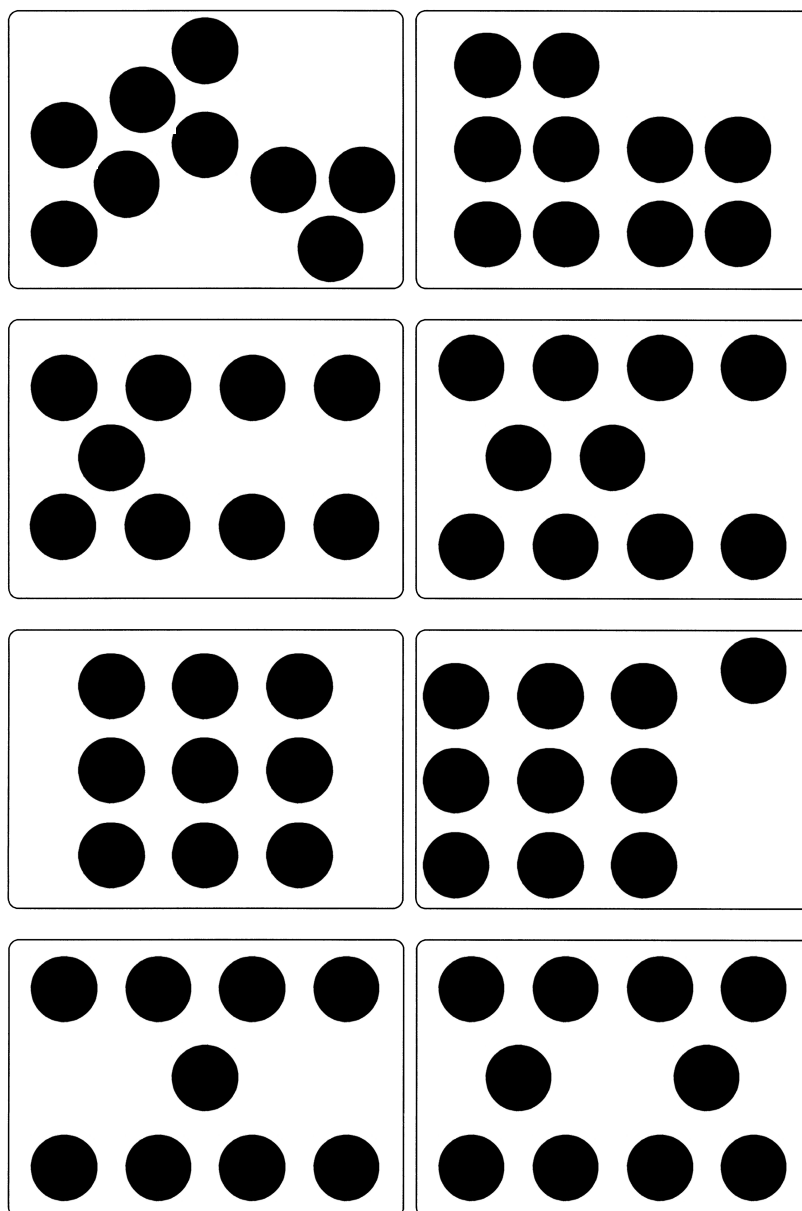
Allegato 6



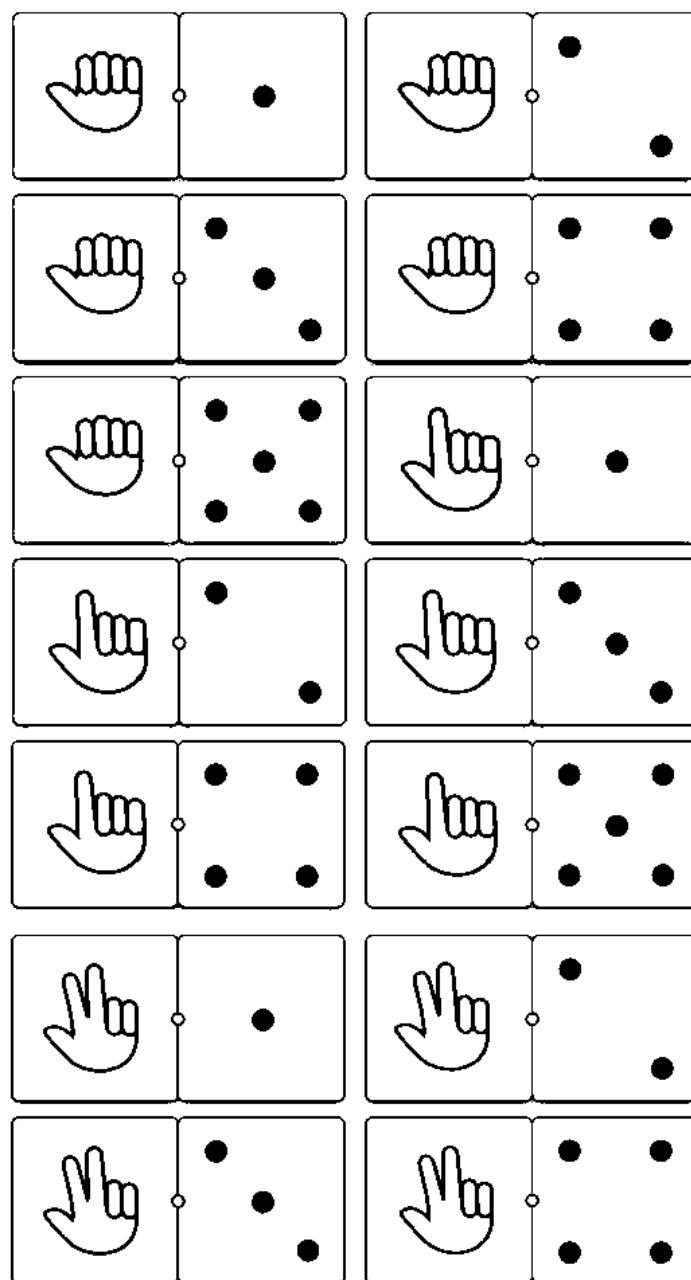
Allegato 7



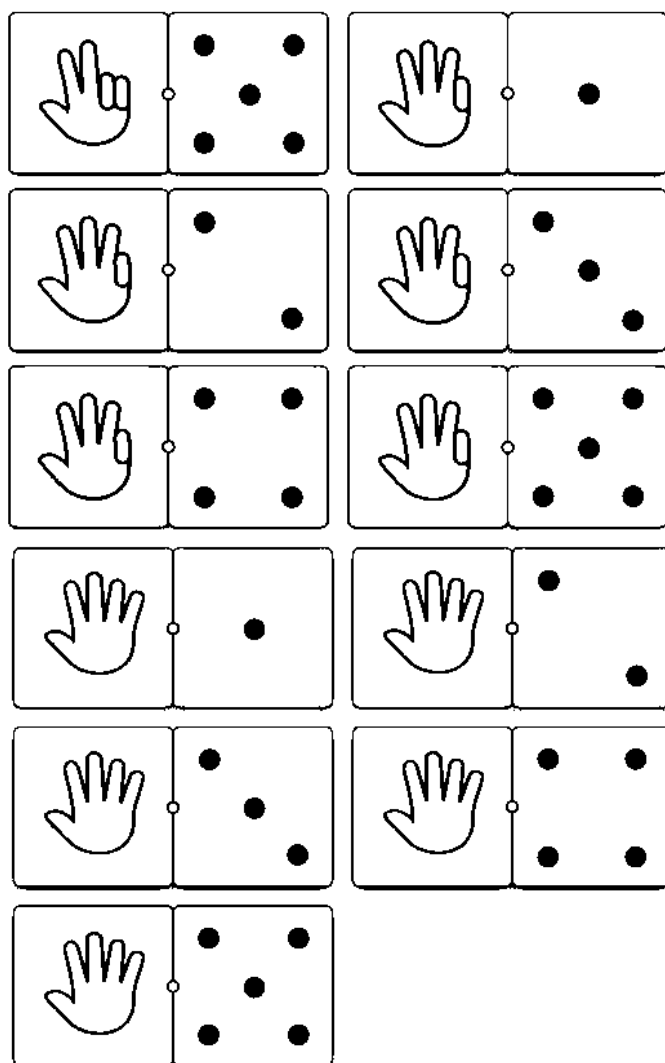
Allegato 8



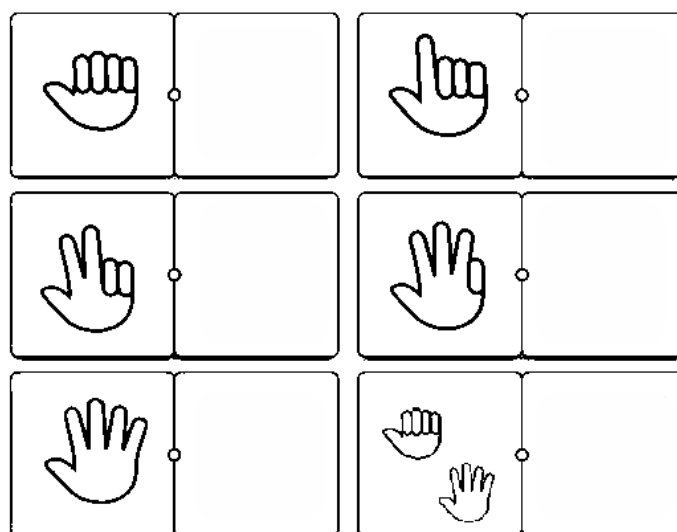
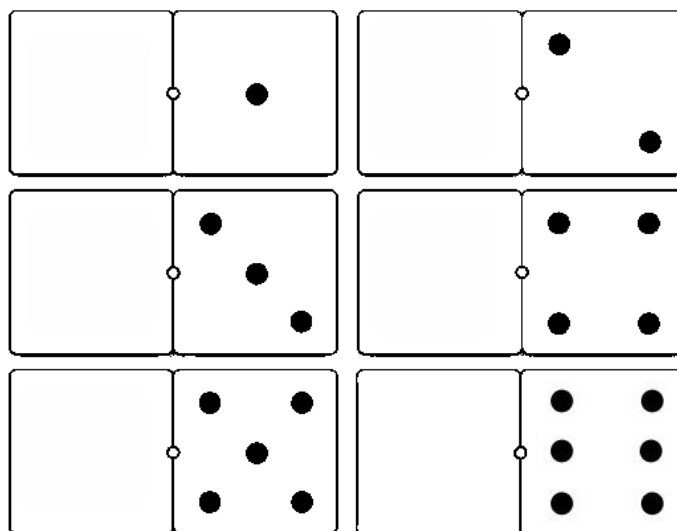
Allegato 9



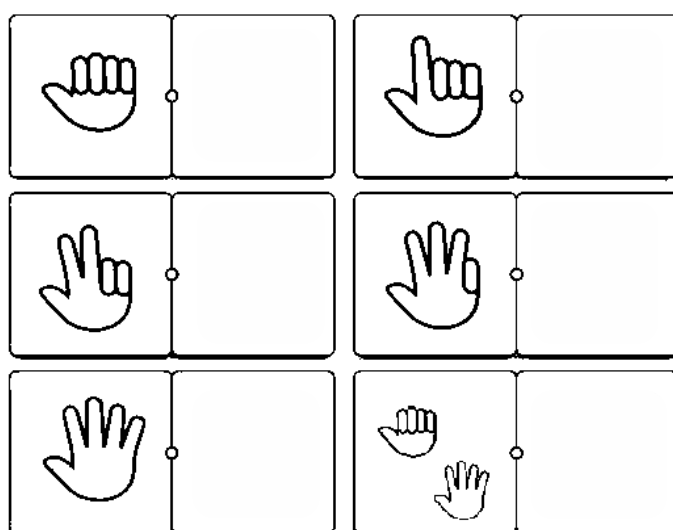
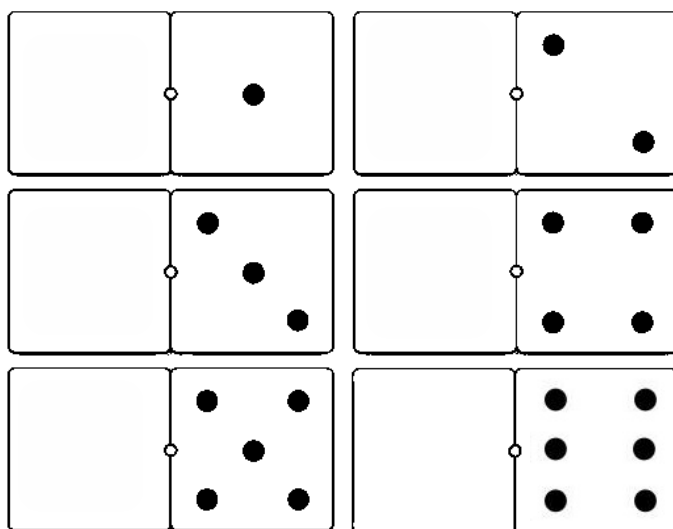
Allegato 10



Allegato 11



Allegato 12



Allegato 13

GIOCHI DI CARTE : RUBAMAZZETTO

Si gioca in quattro persone con un mazzo da 40 carte.
Lo scopo è quello di cercare di prendere il maggior numero di carte.

Svolgimento del gioco:

Tra i giocatori viene scelto il "mazziere", cioè chi deve mescolare le carte e distribuirle. Dopo aver fatto tagliare il mazzo dal giocatore alla sua destra, il mazziere distribuisce le carte. Si distribuiscono tre carte a testa, coperte ed una per volta, in senso orario. Poi se ne scoprono altre quattro, che si lasciano al centro del tavolo. Il resto del mazzo viene accantonato sul tavolo, coperto.

Il giocatore di turno cerca di catturare una delle carte presenti sul tavolo. Per prenderla deve possedere una carta dello stesso valore numerico.

In tal caso la prende e mette le due carte impilate davanti a sé, con il valore scoperto e visibile.

Se non possiede nessuna carta simile, deve scartare una carta al centro del tavolo.

Se ha una carta uguale a quella che sta sopra il mazzetto di uno dei suoi avversari, può prendergli, cioè "rubare", l'intero mazzetto.

Quando tutti i giocatori rimangono senza carte in mano, il mazziere distribuisce altre 3 carte per ciascuno, fino alla fine del mazzo.

Il gioco termina quando non vi sono più carte da distribuire.

Il vincitore del Rubamazzetto è il giocatore che possiede il maggior numero di carte all'interno del proprio mazzetto alla fine della partita.



GIOCHI DI CARTE : RUBAMAZZETTO

Si gioca in quattro persone con un mazzo da 40 carte.
Lo scopo è quello di cercare di prendere il maggior numero di carte.

Svolgimento del gioco:

Tra i giocatori viene scelto il "mazziere", cioè chi deve mescolare le carte e distribuirle. Dopo aver fatto tagliare il mazzo dal giocatore alla sua destra, il mazziere distribuisce le carte.

Si distribuiscono tre carte a testa, coperte ed una per volta, in senso orario. Poi se ne scoprono altre quattro, che si lasciano al centro del tavolo. Il resto del mazzo viene accantonato sul tavolo, coperto.

Il giocatore di turno cerca di catturare una delle carte presenti sul tavolo. Per prenderla deve possedere una carta dello stesso valore numerico.

In tal caso la prende e mette le due carte impilate davanti a sé, con il valore scoperto e visibile.

Se non possiede nessuna carta simile, deve scartare una carta al centro del tavolo.

Se ha una carta uguale a quella che sta sopra il mazzetto di uno dei suoi avversari, può prendergli, cioè "rubare", l'intero mazzetto.

Quando tutti i giocatori rimangono senza carte in mano, il mazziere distribuisce altre 3 carte per ciascuno, fino alla fine del mazzo.

Il gioco termina quando non vi sono più carte da distribuire.

Il vincitore del Rubamazzetto è il giocatore che possiede il maggior numero di carte all'interno del proprio mazzetto alla fine della partita.



Allegato 14

JEUX DE CARTES : LE JEU DE BATAILLE

Le jeu de cartes "La Bataille" se joue à deux avec un jeu de 40 cartes.

Déroulement:

Les cartes sont distribuées entre les 2 joueurs (le donneur doit distribuer le total).

Pour commencer, chaque joueur fait un paquet de ses cartes sans les ordonner et sans les regarder.

À chaque tour, chaque joueur retourne une carte de son paquet sur la table.

Si les cartes posées ne désignent pas le même nombre, le joueur qui a la carte désignant le plus grand nombre prend les deux cartes et les met de côté.

Si les cartes posées désignent le même nombre, il y a bataille : les joueurs disent «bataille !», ils posent chacun une nouvelle carte sur la table et "la plus forte" permet de ramasser toutes les cartes.

Le gagnant d'une partie de Bataille est celui qui aura le plus grand nombre de cartes.



JEUX DE CARTES : LE JEU DE BATAILLE

Le jeu de cartes "La Bataille" se joue à deux avec un jeu de 40 cartes.

Déroulement:

Les cartes sont distribuées entre les 2 joueurs (le donneur doit distribuer le total).

Pour commencer, chaque joueur fait un paquet de ses cartes sans les ordonner et sans les regarder.

À chaque tour, chaque joueur retourne une carte de son paquet sur la table.

Si les cartes posées ne désignent pas le même nombre, le joueur qui a la carte désignant le plus grand nombre prend les deux cartes et les met de côté.

Si les cartes posées désignent le même nombre, il y a bataille : les joueurs disent «bataille !», ils posent chacun une nouvelle carte sur la table et "la plus forte" permet de ramasser toutes les cartes.

Le gagnant d'une partie de Bataille est celui qui aura le plus grand nombre de cartes.



JEUX DE CARTES : LE JEU DE BATAILLE

Le jeu de cartes "La Bataille" se joue à deux avec un jeu de 40 cartes.

Déroulement:

Les cartes sont distribuées entre les 2 joueurs (le donneur doit distribuer le total).

Pour commencer, chaque joueur fait un paquet de ses cartes sans les ordonner et sans les regarder.

À chaque tour, chaque joueur retourne une carte de son paquet sur la table.

Si les cartes posées ne désignent pas le même nombre, le joueur qui a la carte désignant le plus grand nombre prend les deux cartes et les met de côté.

Si les cartes posées désignent le même nombre, il y a bataille : les joueurs disent «bataille !», ils posent chacun une nouvelle carte sur la table et "la plus forte" permet de ramasser toutes les cartes.

Le gagnant d'une partie de Bataille est celui qui aura le plus grand nombre de cartes.



Allegato 15

GIOCHI DI CARTE : CRICETO

Si gioca con un numero variabile di giocatori (ma non più di 20), con un mazzo da 40 carte.

Lo scopo del gioco é di **restare senza carte**. Perde chi rimane con l'ultima carta in mano e diventerà il criceto !

Svolgimento del gioco:

All'inizio della partita il mazziere sceglie (o fa scegliere) casualmente una carta che verrà eliminata dal mazzo e messa da parte senza essere vista da nessuno. Poi distribuisce tutte le restanti carte ai giocatori, una per volta; può capitare che il numero di carte non sia lo stesso per tutti e alcuni ricevano una carta in meno, ma non è un problema.

Appena ricevute le carte ogni giocatore deve formare le coppie di carte dello stesso valore (con le carte che ha in mano) e scartarle mettendole in mezzo al tavolo. Ad esempio, se possiede due uno, due tre, due cinque, ecc., li scarta mettendoli in mezzo al tavolo.

A questo punto a ognuno rimarrà in mano un numero variabile di carte: chi ne ha di più inizia a giocare. Il giocatore di turno prende una carta a caso, senza vederla, dal giocatore alla sua sinistra. Se la carta forma una coppia con un'altra che ha già in mano, allora le scarta entrambe, altrimenti la tiene in mano. Il turno passa poi al giocatore alla sua destra che a sua volta prenderà una carta e così via.

Alla fine una sola carta rimarrà spaiata. Naturalmente perde chi rimane con questa carta in mano, persona che diventerà il criceto . . .



GIOCHI DI CARTE : CRICETO

Si gioca con un numero variabile di giocatori (ma non più di 20), con un mazzo da 40 carte.

Lo scopo del gioco é di **restare senza carte**. Perde chi rimane con l'ultima carta in mano e diventerà il criceto !

Svolgimento del gioco:

All'inizio della partita il mazziere sceglie (o fa scegliere) casualmente una carta che verrà eliminata dal mazzo e messa da parte senza essere vista da nessuno. Poi distribuisce tutte le restanti carte ai giocatori, una per volta; può capitare che il numero di carte non sia lo stesso per tutti e alcuni ricevano una carta in meno, ma non è un problema.

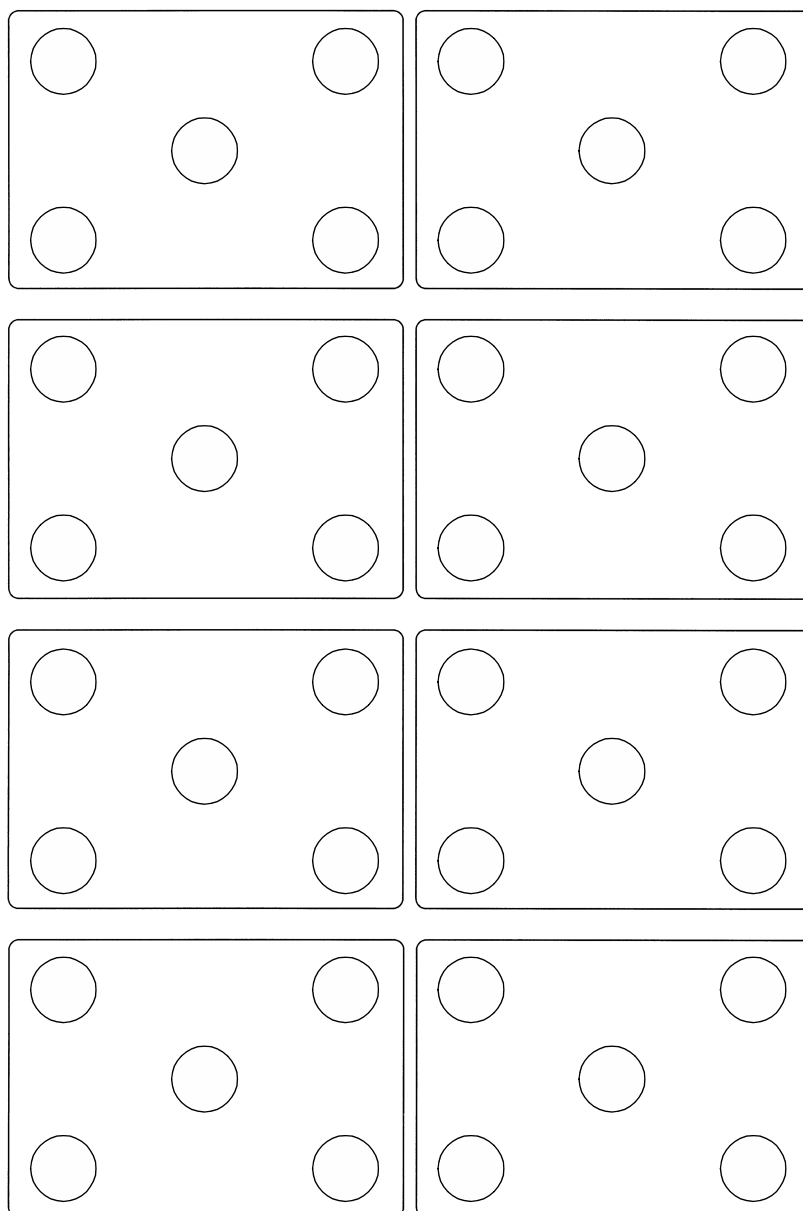
Appena ricevute le carte ogni giocatore deve formare le coppie di carte dello stesso valore (con le carte che ha in mano) e scartarle mettendole in mezzo al tavolo. Ad esempio, se possiede due uno, due tre, due cinque, ecc., li scarta mettendoli in mezzo al tavolo.

A questo punto a ognuno rimarrà in mano un numero variabile di carte: chi ne ha di più inizia a giocare. Il giocatore di turno prende una carta a caso, senza vederla, dal giocatore alla sua sinistra. Se la carta forma una coppia con un'altra che ha già in mano, allora le scarta entrambe, altrimenti la tiene in mano. Il turno passa poi al giocatore alla sua destra che a sua volta prenderà una carta e così via.

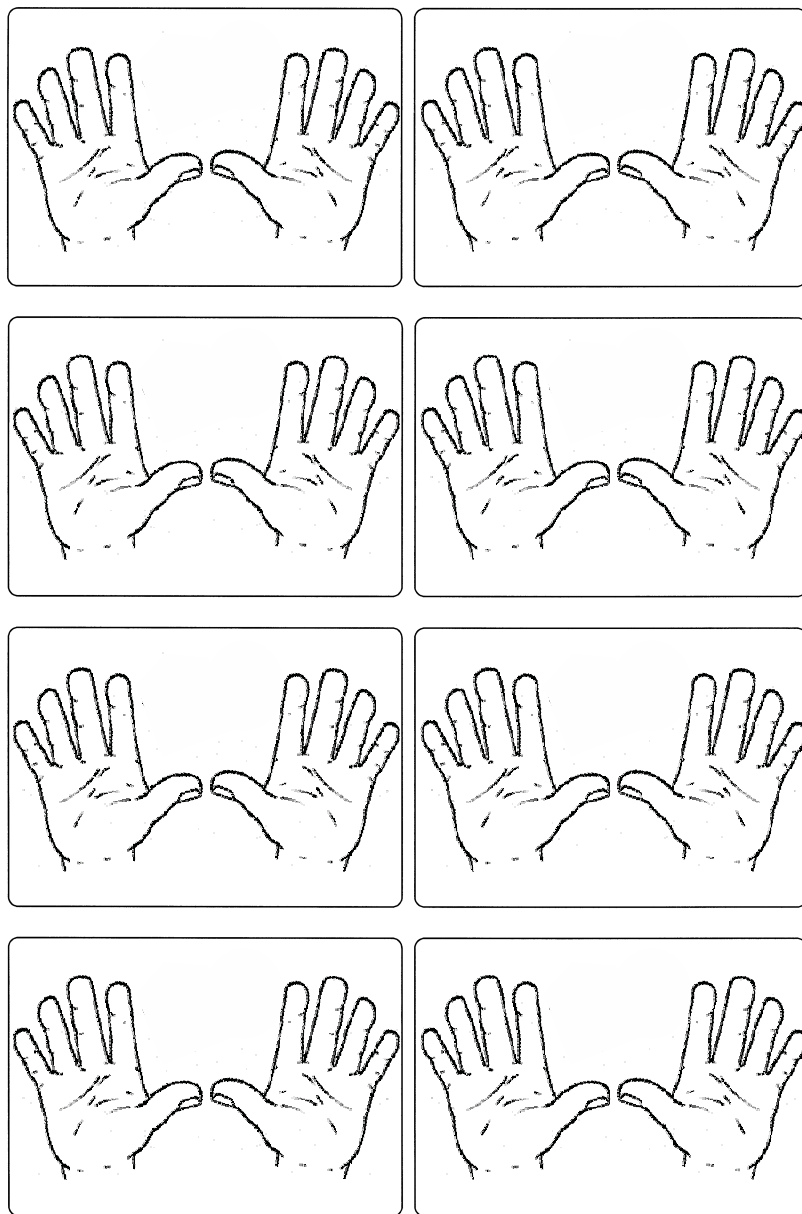
Alla fine una sola carta rimarrà spaiata. Naturalmente perde chi rimane con questa carta in mano, persona che diventerà il criceto . . .



Allegato 16



Allegato 17



Allegato 18

Giochi di carte : RECTO VERSO

Le jeu de cartes "recto verso" se joue à deux avec un nombre variable de cartes.

Au recto figure un dessin-calcul, au verso figure le résultat.

Déroulement:

Toutes les cartes sont étalées sur la table côté recto visible.

Un élève propose un calcul en désignant une carte, l'autre élève doit donner le résultat.

On retourne la carte pour vérifier. Si la réponse est correcte, l'élève qui a répondu prend la carte. Sinon, c'est celui qui a questionné qui la prend.

Les rôles sont échangés à chaque coup.

Chaque carte gagnée donne un point.

En fin de partie, chaque élève comptabilise ses points. Celui qui a le plus de points a gagné.

Giochi di carte : RECTO VERSO

Le jeu de cartes "recto verso" se joue à deux avec un nombre variable de cartes.

Au recto figure un dessin-calcul, au verso figure le résultat.

Déroulement:

Toutes les cartes sont étalées sur la table côté recto visible.

Un élève propose un calcul en désignant une carte, l'autre élève doit donner le résultat.

On retourne la carte pour vérifier. Si la réponse est correcte, l'élève qui a répondu prend la carte. Sinon, c'est celui qui a questionné qui la prend.

Les rôles sont échangés à chaque coup.

Chaque carte gagnée donne un point.

En fin de partie, chaque élève comptabilise ses points. Celui qui a le plus de points a gagné.

BIBLIOGRAFIA

- ADAMS J.W. e HITCH G.J. (1998), Children's arithmetic and working memory. In C.Donlan (Ed.) *The development of mathematical skills*. Hove, Psychology Press.
- BACCAGLINI-FRANK A., ROBOTTI, E. (2013), *Gestire gli studenti con DSA in classe. Alcuni elementi di un quadro comune*. In C. Catanei, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi e P. Vighi, Quaderni GRIMeD, Bologna, Pitagora Editrice, n. 1, pp 75-86.
- BADDELEY A.D. (1986), *Working memory*. Oxford University Press, Oxford.
- BADDELEY A.D. (2006), *Working memory: An overview*. In S.J. Pickering (Ed.), *Working memory and education*, Burlington, MA, Academic Press, 1-31.
- BANDURA A. (1964), *Transmission of patterns of self-reinforcement through modeling*. In *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, Vol 69(1), Jul 1964, 1-9.
- BAROODY A.J. (1989), *Kindergarthens' mental addition with single-digit combinations*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 159-172.
- BAROODY A.J. (1992), *The development of preschoolers' counting skills and principles*. In J. Bideaut (Ed.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- BARTOLINI BUSSI M.G. (2008), *Matematica. I numeri e lo spazio*. Bergamo, Junior.
- BARTOLINI BUSSI M.G. & MARIOTTI M.A. (2008), *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vigotskij*. Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia, Dipartimento di Matematica, Università di Siena, 2008.
- BELLOS A. (2011), *Il meraviglioso mondo dei numeri*. Einaudi, Torino.
- BONOTTO C., BACCARIB R., BASSO M., FELTRESI M. (1995), *Sulle strategie di conta e procedure di calcolo mentale nei bambini di scuola primaria*. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 520-548.
- BUTTHERWORTH B. (1999), *Intelligenza matematica*. Rizzoli, Milano.
- BUTTHERWORTH B. (2005), *The development of aritmetical abilities*. In *Joutnal of Child Psychology and Psychiatry*. 46, 3-18.
- CARAMAZZA A. e MCCLOSKEY, M. (1987), *Dissociation of calculation processes*. In

G. Deloche e X. Seron (Eds.), *Mathematical disabilities: Cognitive neuropsychological perspective*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

CASE R. (2000), *Un modello psicologico dello sviluppo del senso del numero*. In *Età evolutiva*, 65 5-17.

CLEMENTS D.H. (1999), *Subitizing: What is it? Why Teach it?* In *Teaching Children Mathematics*, 5, 400-405

CORNOLDI C., LUCANGELI D., & BELLINA M. (2002), *AC-MT – Test di valutazione delle abilità di calcolo*. Trento: Erickson.

CORNOLDI C. (2007), *Difficoltà e disturbi dell'apprendimento*. Il Mulino, Bologna.

CORSI P.M. (1972), *Human memory and the medial temporal region of the brain*. In *Dissertation Abstract International*. University Microfilms.

D'AMICO A. (2006), *Potenziare la memoria di lavoro per prevenire l'insuccesso in matematica*. In *Età Evolutiva*, 83, 88-97.

DANTZING T. (1965), *Il numero. Linguaggio della scienza*. La Nuova Italia, Firenze.

DANTZING T. (1967), *Number: The language of science*. New York, The Free Press.

DEHAENE S. (1992), *Varieties of numerical abilities*. In *Cognition*, 44, 1-42.

DEHAENE S. (1997), *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press, New York.

DEHAENE S., LAMBERTZ G., e COHEN L. (1998), *Abstract representations of numbers in the animal and human brain*. In *Trends Neuroscience*, 21, 355-361.

DEHAENE S. (2000), *Il pallino della matematica: scoprire il genio dei numeri che è in noi*. Mondadori Editori, Milano.

DUVAL R. (2006), *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. In *Educational studies in mathematics*.

FUSON K.C. (1988), *Children's counting and concept of number*. New York, Springer.

FUSON K.C. e HALL J.W. (1983), *The acquisition of early number word meanings*. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of children's mathematical thinking*. New York, Academic Press, 49- 107.

FUSON K.C., PERGAENT G.G. e LYONS B.G. (1985), *Collection terms and*

preschoolers' use of the cardinality rule. In *Cognitive Psychology*, 17, 315-323.

FUSON K.C. e KNOW Y. (1992), *Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools.* In J. Bideaud, C. Meliac e J.P. Disher (a cura di), *Pathways to number, children's developing numerical abilities*, Hillsdale, NJ, LEA.

GALLISTEL C.R. e GELMAN R. (1992). *Preverbal and verbal counting e computation.* In *Cognition*, 44, 43-74.

GARDNER H. (1994), *Intelligenze multiple.* Anabasi.

GEARY D.C. (1994), *Children's Mathematical Development. Research and practical applications.* Washington DC, American Psychological Association.

GELMAN R. e GALLISTEL C.R. (1978), *The child's understanding of numbers.* Cambridge, MA, Harvard University Press.

GELMAN R. e MECK E. (1983), *Preschooler's counting: Principles before skill.* In *Cognition*, 13, 343-359.

GELMAN R. e BUTTHERWORTH B. (2005), *Number and language: how are they related?* In *Sciences*.

GREENO J.G. (1991), *Number sense as situated knowing in a conceptual domain.* In *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, 170-218.

IANES D. (2006), *La speciale normalità. Strategie di integrazione e inclusione per le disabilità e i bisogni educativi speciali.* Trento Erickson.

LIVERTA SEMPIO O. (1987), *Il bambino e la costruzione del numero.* La Nuova Italia Scientifica, Roma.

LIVERTA SEMPIO O. (1998), *Vygotskij, Piaget, Bruner. Concezioni dello sviluppo.* Milano, Raffaello Cortina.

LIVERTA SEMPIO O e MARCHETTI A. (1997), *Cognitive development and theories of mind: towards a contextual approach.* In *European Journal of Psychology of Education*, Vol. XII, n°1, 3-21.

LUCANGELI D., FIORE C. e TRESSOLDI P.E. (1998), *ABCA – Test delle abilità di calcolo.* Trento, Erickson.

LUCANGELI D., POLI S. e MOLIN A. (2003), *Lo sviluppo dell'intelligenza numerica.* Erickson, Trento.

LUCANGELI D. e IANNITI A. (2004), *Lo sviluppo della conoscenza numerica,* In R.

Vinello, D. Lucangeli (a cura di), *Lo sviluppo delle conoscenze del bambino*, Junior, Azzano San Paolo, 163-181.

LUCANGELI D., ZORZI M. e CABRELE, S. (2006), *Lo sviluppo della rappresentazione dei numeri*. In *Età evolutiva*, 83, 63-70.

MCCLOSKEY M., CARAMAZZA A. e BASILI, A.G. (1985), *Cognitive mechanism in number processing and calculation: Evidence from Dyscalculia*. In *Brain and Cognition*, 4, 171-196.

PIAGET J. (1952), *La psychologie de l'intelligence*. Editrice universale, Firenze.

PIAGET J. (1965), *The child's conception of number*. New York, Norton.

PIAGET J. e SZEMINSKA A. (1941), *La Genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé (trad. Italiana "La genesi del numero nel bambino". Firenze: la Nuova Italia, 1979).

SIEGLER R.S. e SHRAGER J. (1984), *Strategy choice in addition and subtraction: How do children know what to do?* In C. Sophian (a cura di), *Origins of cognitive skills*, Mahwah, NJ, Erlbaum, 229-293.

SOWDER L. (1992), *Estimation and number sense*. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 371-389.

TANI F., CIUFFI N. e VITTA A. (2007), *Le difficoltà di calcolo nei bambini*. Seid Editori, Firenze.

TROMBETTA C. e LOREDANA R. (2000), *La ricerca-azione: Il modello di Kurt Lewin e le sue applicazioni*. Erickson, Trento.

TRICK L.M. e PYLYSYN Z.W. (1988), *When subitizing fails: The importance of preattentive item indexing for subitizing*. University of Western Ontario.

VYGOTSKIJ L.S. (1926), *Educational psychology*. Giunti Editori, Roma.

VYGOTSKIJ L.S. (1966), *Il ruolo del gioco nello sviluppo mentale del bambino*. Giunti Editori, Roma.

VYGOTSKIJ L.S. (1966), *Il ruolo del gioco nello sviluppo mentale del bambino*. Giunti Editori, Roma.

WYNN K. (1990), *Children's understanding of counting*. In *Cognition*, 36, 155-193.

WYNN K. (1992a), *Evidence against empiricist accounts of the origins of numerical*

knowledge. In *Mind & Language*, 7, 315-332.

WHITE R. W. (1959), *Motivation reconsidered: The concept of competence*. In *Psychological Review*, 66, 297-333.

WYNN K. (1992b), *Addition and subtraction by human infants*. In *Nature*, 358, 749-750.

XU F. e SPELKE E.S. (2000), *Larger number discrimination on 6-month-old infants*. In *Cognition*, 74.

SITOGRAFIA

www.mat.uniroma3.it

sito ufficiale dell'Università di Roma Tre, (visitato il 14/12/2014).

www.filosofia.unimi.it

sito ufficiale dell'Università di Milano, dipartimento di filosofia, slide subitizing (visitato il 7/10/2014).

www.indicazioninazionali.it

sito ufficiale delle Indicazioni Nazionali per i Curricolo della scuola dell'Infanzia e del primo ciclo di istruzione (visitato il 13/01/2015).

www.didmat.dima.unige.it

sito del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, referente Paolo Boero, Professore Associato di Matematiche Complementari presso l'Università di Genova (visitato il 7/01/2015).

www.percontare.asphi.it

sito della Fondazione Asphi Onlus, consultazione del Progetto Per Contare i cui referenti scientifici sono Prof. Maria Guseppina Bartolini, Professore ordinario presso la Facoltà di Scienze della Formazione presso l'Università di Modena e Reggio Emilia e Prof. Giacomo Stella, Professore ordinario presso la Facoltà di Scienze della Formazione presso l'Università di Modena e Reggio Emilia (visitato il 12/12/2014).

www.edscuola.it (visitato il 15/11/2015).

www.invalsi.it, sito ufficiale dell'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e di Formazione (visitato il 7/01/2015).

<http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/dsa>, sito del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (visitato il 18/12/2014).

Varie

Ministero della Pubblica Istruzione, Indicazioni per il Curricolo per la scuola dell'Infanzia e del primo ciclo d'istruzione, Tecnodid Editrice, Napoli, 2007.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Nuove Indicazioni Nazionali per il curriculum, Decreto Ministeriale 254 del 16 novembre 2012.